《北京大学数学教学系列丛书》编委会

内 容 简 介

本书系统讲述二阶抛物型偏微分方程的基本理论、方法和应用。全书共分九章。内容包括Campanato空间，Sobolev空间(关于x与t异性)，弱解的存在性、惟一性，Schauder理论，L^p理论，De Giorgi-Nash-Moser估计，Krylov-Safonov估计，散度型拟线性方程，完全非线性方程等。

本书比较完整地介绍了Campanato空间在二阶抛物型偏微分方程的应用，首先引进了关于抛物距离的Campanato空间，以它为工具给出了关于x与t异性的Sobolev空间$W_p^{2,1}$的嵌入定理，建立了抛物型方程的Schauder理论，L^p理论，然后与De Giorgi-Nash-Moser估计结合，证明了散度型拟线性抛物型方程解的相当丰满的正则性。对于非散度型的一般方程介绍了Krylov-Safonov估计并用它来讨论完全非线性方程。

本书可作为综合大学、高等师范院校数学系、应用数学系、力学系、物理系偏微分方程方向高年级大学生、研究生的教材或教学参考书；对于从事偏微分方程工作的数学工作者、科技工作者，本书也是一部较好的学习参考书。

作 者 简 介

陈亚浙　北京大学数学科学学院教授，博士生导师，1962年毕业于北京大学数学力学系，长期从事偏微分方程的教学与科研工作。合作编写的《数学物理方程讲义》、《二阶椭圆型方程与椭圆型方程组》分别获教育部(教委)优秀教材奖。

北京大学数学教学系列丛书

二阶抛物型偏微分方程

陈亚浙　编著

北京大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

二阶抛物型偏微分方程/陈亚浙编著. —北京：北京大学出版社，2003.1

(北京大学数学教学系列丛书)

ISBN 7-301-05369-X

Ⅰ.二… Ⅱ.陈… Ⅲ.二阶-抛物型方程：偏微分方程-高等学校-教材 Ⅳ.O175.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 036464 号

书　　名：二阶抛物型偏微分方程
著作责任者：陈亚浙　编著
责 任 编 辑：刘　勇
标 准 书 号：ISBN 7-301-05369-X/O·0523
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村 北京大学校内　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn
电　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62752032
排 版 者：高新特激光照排中心　62637627
印 刷 者：北京大学印刷厂
经 销 者：新华书店
890×1240　A5 开本　9.75 印张　250 千字
2003 年 1 月第 1 版　2003 年 1 月第 1 次印刷
印　　数：0001—4000 册
定　　价：16.00 元

序　言

自 1995 年以来，在姜伯驹院士的主持下，北京大学数学科学学院根据国际数学发展的要求和北京大学数学教育的实际，创造性地贯彻教育部“加强基础，淡化专业，因材施教，分流培养”的办学方针，全面发挥我院学科门类齐全和师资力量雄厚的综合优势，在培养模式的转变、教学计划的修订、教学内容与方法的革新，以及教材建设等方面进行了全方位、大力度的改革，取得了显著的成效。2001 年，北京大学数学科学学院的这项改革成果荣获全国教学成果特等奖，在国内外产生很大反响。

在本科教育改革方面，我们按照加强基础、淡化专业的要求，对教学各主要环节进行了调整，使数学科学学院的全体学生在数学分析、高等代数、几何学、计算机等主干基础课程上，接受学时充分、强度足够的严格训练；在对学生分流培养阶段，我们在课程内容上坚决贯彻“少而精”的原则，大力压缩后续课程中多年逐步形成的过窄、过深和过繁的教学内容，为新的培养方向、实践性教学环节，以及为培养学生的创新能力所进行的基础科研训练争取到了必要的学时和空间。这样既使学生打下宽广、坚实的基础，又充分照顾到每个人的不同特长、爱好和发展取向。与上述改革相适应，积极而慎重地进行教学计划的修订，适当压缩常微、复变、偏微、实变、微分几何、抽象代数、泛函分析等后续课程的周学时。并增加了数学模型和计算机的相关课程，使学生有更大的选课余地。

在研究生教育中，在注重专题课程的同时，我们制定了 30 多门研究生普选基础课程(其中数学系 18 门)，重点拓宽学生的专业基础和加强学生对数学整体发展及最新进展的了解。

教材建设是教学成果的一个重要体现。与修订的教学计划相配合，我们进行了有组织的教材建设。计划自 1999 年起用 8 年的时间

修订、编写和出版40余种教材。这就是将陆续呈现在大家面前的《北京大学数学教学系列丛书》。这套丛书凝聚了我们近十年在人才培养方面的思考，记录了我们教学实践的足迹，体现了我们教学改革的成果，反映了我们对新世纪人才培养的理念，代表了我们新时期的数学教学水平。

经过20世纪的空前发展，数学的基本理论更加深入和完善，而计算机技术的发展使得数学的应用更加直接和广泛，而且活跃于生产力第一线，促进着技术和经济的发展，所有这些都正在改变着人们对数学的传统认识，同时也促使数学研究的方式发生巨大变化。作为整个科学技术基础的数学，正突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透。作为一种文化，数学科学已成为推动人类文明进化、知识创新的重要因素，将更深刻地改变着客观现实的面貌和人们对世界的认识。数学素质已成为今天培养高层次创新人才的重要基础。数学的理论和应用的巨大发展必然引起数学教育的深刻变革。我们现在的改革还是初步的。教学改革无禁区，但要十分稳重和积极；人才培养无止境，既要遵循基本规律，更要不断创新。我们现在推出这套丛书，目的是向大家学习。让我们大家携起手来，为提高中国数学教育水平和建设世界一流数学强国而共同努力。

张 继 平

2002年5月18日

于北京大学蓝旗营

前　言

1989年以来，作者在北京大学及计算数学与应用物理研究所给研究生多次讲授“抛物型偏微分方程”课程，他们大多修过我的另一课程“椭圆型偏微分方程”，为了避免太多的重复，必须采用显著不同的途径，当时虽然也有一些采用 Campanato 空间方法研究抛物型方程的文章，但还未见有比较系统的材料，我就萌生了利用关于抛物距离的 Campanato 空间串起抛物型偏微分方程主要内容的想法，在阅读了 Giaquinta & Giusti 文[14]中解决散度型拟线性椭圆型方程弱解的 $C^{1,\alpha}$ 全局正则性的 Campanato 空间技巧之后，更坚定了我的想法。当时就写了本书的前七章，即线性方程部分作为当时的讲稿。后来因为身体不佳没有再动笔。最近两年才续写了散度型拟线性方程与完全非线性方程两部分。

本书的材料是这样构成的：第一章是关于抛物距离的 Campanato 空间，它是 Da Prato[8]结果的一个特例；第二章我们应用它建立了 $W_p^{2l,l}(Q_T)$的嵌入定理；第三章应用 Galerkin 方法建立弱解的存在惟一性；第四、五章的 Schauder 理论与 L^p 理论基本上是 Campanato 本人的结果；第六章散度型方程的 De Giorgi-Nash-Moser 估计大致来自于 Ladyzhenskaya 等人的工作(参见文献[23])，我们加上了局部 L^∞估计与 Harnack 不等式；第七章抛物型方程的 Alexandrof-Bakel'man-Pucci 型极值原理采用的是 Tso[31]的简化证明，Krylov-Safonov 估计基本上是采用他们的原创证明；第八章散度型拟线性方程在可控增长条件下与自然增长条件下弱解的存在性是综合了 Ladyzhenskaya 等人[23]的工作与周蜀林[33]的文章，正则性的结果是上面提到的文[14]在抛物型方程的推广；第九章讨论了非散度拟线性方程与完全非线性方程古典解的存在性，大多采用 Krylov 原来的方法，也有一些是我们补充的证明，最后用凝固法与多项式逼近得到 $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}$估计是 Caffarelli

在研究粘性解时给出的。

本书作为教材，为了简单明了，除了 $V_2(Q_T)$ 等少数函数空间外，我们基本上没有提到关于 x 与 t 不同幂次的空间；只讨论了第一初边值问题与初值问题，没有涉及其他初边值问题；对于一些重要课题如渐近分析，blow-up 问题等未加讨论，只集中于解的存在性、惟一性及正则性；对于一些应用课题如自由边界问题、渗流问题等也未加涉及。作者学识有限，错误在所难免，请读者提出宝贵意见。

这里我要感谢同济大学姜礼尚教授，作为他的学生，作者曾得到他很多指导；我也要感谢我们讨论班的同事吴兰成、黄少云、刘西垣、王耀东诸教授，作者曾就有关问题与他们进行过有益的讨论；我还要感谢刘嘉荃教授，他审阅了初稿，提出了宝贵的意见；最后我还要感谢刘勇编辑，他进行了非常细致的编辑加工与校对工作。

作　者

2002 年 12 月 14 日

目 录

第一章　Campanato 空间(关于抛物距离)

20 世纪 60 年代以来,Campanato 空间已成为研究椭圆型与抛物型偏微分方程(组)解的正则性的重要工具,本书将以它作为主要手段来介绍二阶抛物型方程的各种正则性理论.

为适应抛物型方程的需要,本章将研究关于抛物距离的 Campanato 空间,它是参考文献[8]的一个特例.

§1　Morrey 空间与 Campanato 空间

设 $\boldsymbol{R}^n$ 是 n 维欧氏空间,其上的点记为 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 又引入时间变量 t, 构成 $n+1$ 维空间 $\boldsymbol{R}^{n+1}$, 其上的点记为 (x,t), 简记为 $X=(x,t)$. 有时为明确 t 是 X 点的时间变量,又写 $X=(x,t_X)$. 在 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中引进距离

$$\delta(X,Y)=\max\{|x-y|,|t_X-t_Y|^{1/2}\}, \tag{1.1}$$

它通常称为**抛物距离**. 我们在本章中以 $Q_R(X)$ 表示以 X 为心, R 为半径的关于抛物距离 $\delta(X,Y)$ 的球,即

$$\begin{aligned} Q_R(X) &= \{Y\in\boldsymbol{R}^{n+1}\mid\delta(X,Y)<R\} \\ &= B_R(x)\times(t_X-R^2,t_X+R^2), \end{aligned} \tag{1.2}$$

其中 $B_R(x)$ 表示以 x 为心、R 为半径的 n 维球.

设 D 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的有界区域. 对于任意的 $X\in D$, 记 $D(X,r)=D\cap Q_r(X)$. 又记 $d=\operatorname{diam}D$, 它是 D 关于距离 $\delta(X,Y)$ 的直径. 首先我们引入 Morrey 空间.

定义 1.1(Morrey 空间)　对于 $1\leqslant p<\infty$, $\theta\geqslant 0$, 以 $L^{p,\theta}(D;\delta)$ 表示由 $L^p(D)$ 中满足

$$\|u\|_{L^{p,\theta}(D,\delta)}\overset{\text{def}}{=\!=}\Big\{\sup_{\substack{X\in D\\ d\geqslant\rho>0}}|D(X,\rho)|^{-\theta}\int_{D(X,\rho)}|u(Y)|^p\mathrm{d}Y\Big\}^{1/p}<\infty \tag{1.3}$$

的所有函数 u 所组成的赋范线性空间,以(1.3)作为空间的范数.

容易验证 $L^{p,\theta}(D;\delta)$ 是 Banach 空间.

引理 1.1　$L^{p,\theta}(D;\delta)$ 有以下性质:

(1) $L^{p,0}(D;\delta) \cong L^p(D)$;

(2) $L^{p,1}(D;\delta) \cong L^\infty(D)$;

(3) 如果 $\theta > 1$, 则 $L^{p,\theta}(D;\delta) \cong \{0\}$;

(4) 如果 $1 \leqslant p \leqslant q < \infty, (1-\theta)/p \geqslant (1-\sigma)/q$, 则

$$L^{q,\sigma}(D;\delta) \subset L^{p,\theta}(D;\delta),$$

其中 $A \subset B$ 不仅表示两个 Banach 空间的包含关系,且蕴含着 A 的范数强于 B 的范数, $A \cong B$ 表示 $A \subset B$ 与 $B \subset A$ 同时成立.

证明　性质(1)是显然的. 现证明(2). 容易看出

$$\| u \|_{L^{p,1}(D,\delta)} \leqslant \| u \|_{L^\infty(D)}.$$

另一方面,利用 Lebesgue 微分定理,如果 $u \in L^p(D)$, 则

$$|u(X)|^p = \lim_{\rho \to 0} |Q_\rho|^{-1} \int_{Q_\rho(X)} |u(Y)|^p \mathrm{d}Y, \quad \text{a.e. } X \in D. \quad (1.4)$$

因此我们又有

$$\| u \|_{L^\infty(D)} \leqslant \| u \|_{L^{p,1}(D,\delta)}.$$

性质(2)得证. 设 $u \in L^{p,\theta}(D;\delta)$, 其中 $\theta > 1$. 对于任意 $\rho > 0$, 当 $Q_\rho(X) \subset D$ 时,由范数的定义,我们有

$$|Q_\rho|^{-1} \int_{Q_\rho(X)} |u(Y)|^p \mathrm{d}Y \leqslant |Q_\rho|^{\theta-1} \| u \|_{L^{p,\theta}(D,\delta)}.$$

在上式中令 $\rho \to 0$, 注意到(1.4),则有

$$|u(X)|^p \leqslant 0, \quad \text{a.e. } X \in D.$$

这就蕴含着性质(3). 至于性质(4),只需应用 Holder 不等式.

定义 1.2(Campanato 空间)　对于 $p \geqslant 1, \theta \geqslant 0$, 以 $\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)$ 表示由 $L^p(D)$ 中满足

$$[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \left\{ \sup_{\substack{X \in D \\ d \geqslant \rho > 0}} |D(X,\rho)|^{-\theta} \int_{D(X,\rho)} |u(Y) - u_{X,\rho}|^p \mathrm{d}Y \right\}^{1/p} < \infty \quad (1.5)$$

的所有函数 u 组成的赋范线性空间,其上的范数定义为

$$\|u\|_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)} \stackrel{\text{def}}{=\!=\!=} \left\{\|u\|_{L^p(D)}^p + [u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)}^p\right\}^{1/p}. \tag{1.6}$$

在(1.5)中 $u_{X,\rho}$ 表示 u 在 $D(X,\rho)$ 上的积分平均值,即

$$u_{X,\rho} = \fint_{D(X,\rho)} u(Y)\mathrm{d}Y = |D(X,\rho)|^{-1}\int_{D(X,\rho)} u(Y)\mathrm{d}Y. \tag{1.7}$$

以后通常用以下记号表示积分平均值

$$u_A = \fint_A u(Y)\mathrm{d}Y = |A|^{-1}\int_A u(Y)\mathrm{d}Y, \tag{1.8}$$

其中 A 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 的可测集, $|A|$ 是 A 的 Lebesgue 测度.

Campanato 空间也是 Banach 空间. 它也有以下性质:如果 $1\leqslant p \leqslant q<\infty$, $(1-\theta)/p\geqslant(1-\sigma)/q$, 则

$$\mathscr{L}^{q,\sigma}(D;\delta)\subset\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta).$$

关于其他更深刻的性质我们将在后面两节讨论.

定义 1.3(Holder 空间) 对于 $0<\alpha\leqslant 1$, 以 $C^\alpha(\overline{D};\delta)$ 表示满足

$$[u]_{\alpha,D} \stackrel{\text{def}}{=\!=\!=} \sup_{\substack{X\in D\\ d\geqslant\rho>0}} \frac{|u(X)-u(Y)|}{\delta(X,Y)^\alpha} < \infty \tag{1.9}$$

的所有函数 u 组成的线性空间,其上赋予范数

$$|u|_{\alpha,D} \stackrel{\text{def}}{=\!=\!=} \sup_D |u| + [u]_{\alpha,D}. \tag{1.10}$$

$C^\alpha(\overline{D};\delta)$ 也是 Banach 空间,显然

$$C(\overline{D})\supset C^\alpha(\overline{D};\delta).$$

关于 Holder 空间的性质,我们将在第四章讨论,本章仅仅说明它与 Campanato 空间的关系.

§2 当 $\theta\neq 1$ 时, $\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)$ 的性质

为了进一步研究 $\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)$ 的性质,我们必须要求 D 的边界有一定的正则性.

定义 2.1 区域 D 称为(A)型的,如果存在常数 $A>0$,使得对于任意 $X\in D$, $0<\rho\leqslant \operatorname{diam}D$, 都有

$$|D(X,\rho)|\geqslant A|Q_\rho(X)|. \tag{2.1}$$

以下是 Campanato 空间最重要的结果:

定理 2.1 设 D 是(A)型区域, $p \geqslant 1$, 则

(1) 当 $0 \leqslant \theta < 1$ 时, $L^{p,\theta}(D;\delta) \cong \mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)$;

(2) 当 $1 < \theta \leqslant 1 + \dfrac{p}{n+2}$ 时, $\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta) \cong C^{\alpha}(\overline{D};\delta)$, 这里

$$\alpha = (n+2)(\theta-1)/p.$$

我们在下面经常用到以下初等不等式: 设 $a>0, b>0, p\geqslant 1$, 则

$$(a+b)^p \leqslant 2^{p-1}a^p + 2^{p-1}b^p.$$

为证明定理 2.1,我们需要以下三个引理:

引理 2.2 设 D 是(A)型区域, $u \in \mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)$, 则对于任意 $0 < \rho < R \leqslant \mathrm{diam}D$, 存在 $C \geqslant 1$ 使得

$$|u_{X,\rho} - u_{X,R}| \leqslant CR^{\theta(n+2)/p}\rho^{-(n+2)/p}[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)}, \tag{2.2}$$

其中 C 仅依赖于 n,θ,p 与(2.1)中的常数 A, $u_{X,R}$ 按式(1.7)定义.

证明 对于任意 $Y \in D(X,\rho)$, 我们有

$$|u_{X,\rho} - u_{X,R}|^p \leqslant 2^{p-1}\{|u_{X,\rho} - u(Y)|^p + |u(Y) - u_{X,R}|^p\},$$

不等式两边关于 Y 在 $D(X,\rho)$ 上积分,可得

$$\begin{aligned}
&|u_{X,\rho} - u_{X,R}|^p|D(X,\rho)| \\
&\leqslant 2^{p-1}\left\{\int_{D(X,\rho)}|u(Y) - u_{X,\rho}|^p\mathrm{d}Y + \int_{D(X,R)}|u(Y) - u_{X,R}|^p\mathrm{d}Y\right\} \\
&\leqslant 2^p|D(X,R)|^{\theta}[u]^p_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)}.
\end{aligned}$$

应用(A)型区域的性质,立即得到

$$|u_{X,\rho} - u_{X,R}|^p \leqslant \frac{2^p\omega_n^{\theta-1}}{A}R^{\theta(n+2)}\rho^{-(n+2)}[u]^p_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D,\delta)},$$

其中 ω_n 是 n 维单位球的体积. 证毕.

引理 2.3 在引理 2.2 的条件下,对于任意正整数 m, 有

$$|u_{X,R} - u_{X,2^{-m}R}| \leqslant CR^{\alpha}|1 - 2^{-\alpha m}|[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D,\delta)}, \tag{2.3}$$

其中 $\alpha = (n+2)(\theta-1)/p$, C 依赖于 n,p,θ 与(2.1)中的常数 A .

证明 由引理 2.2,

$$|u_{X,2^{-j}R} - u_{X,2^{-j+1}R}| \leqslant CR^{\alpha}2^{\frac{\theta(n+2)-j\alpha p}{p}}[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)}.$$

显然

$$|u_{X,R} - u_{X,2^{-m}R}| \leqslant \sum_{j=1}^{m}|u_{X,2^{-j}R} - u_{X,2^{-j+1}R}|$$

$$\leqslant CR^{\alpha}2^{\theta(n+2)/p}[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)}\sum_{j=1}^{m}2^{-j\alpha}$$
$$\leqslant CR^{\alpha}|1-2^{-\alpha m}|[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)},$$

这即为所求. 证毕.

引理 2.4 在引理 2.2 的条件下,当 $\theta<1$ 时,我们有

$$|u_{X,R}|\leqslant|u_D|+CR^{\alpha}[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)},\tag{2.4}$$

其中 $\alpha=(n+2)(\theta-1)/p$,C 依赖于 n,p,θ 与(2.1)中的常数 A.

证明 记 $d=\mathrm{diam}D$(关于距离 $\delta(X,Y)$). 对于 $0<R\leqslant\mathrm{diam}D$,必存在 $m\geqslant0$ 使得

$$2^{-(m+1)}d\leqslant R\leqslant2^{-m}d.\tag{2.5}$$

显然

$$|u_{X,R}|\leqslant|u_{X,R}-u_{X,2^{-m}d}|+|u_{X,2^{-m}d}-u_{X,d}|+|u_D|,\tag{2.6}$$

应用引理 2.2 与式(2.5)得

$$|u_{X,R}-u_{X,2^{-m}d}|\leqslant C(2^{-m}d)^{\frac{\theta(n+2)}{p}}R^{\frac{-(n+2)}{p}}[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)}$$
$$\leqslant CR^{\alpha}2^{\frac{\theta(n+2)}{p}}[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)}.$$

应用引理 2.3 并注意到 $\alpha<0$,我们有

$$|u_{X,2^{-m}d}-u_{X,d}|\leqslant Cd^{\alpha}|1-2^{-\alpha m}|[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)}$$
$$\leqslant 2CR^{\alpha}[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)}.$$

将上面两个估计代入式(2.6)立即得到式(2.4). 证毕.

定理 2.1 的证明 我们首先证明第一个结论. 设 $0\leqslant\theta<1$,$u\in L^{p,\theta}(D;\delta)$. 由于

$$\int_{D(X,\rho)}|u(Y)-u_{X,\rho}|^p\mathrm{d}Y$$
$$=\int_{D(X,\rho)}\left|⨍_{D(X,\rho)}(u(Y)-u(Z))\mathrm{d}Z\right|^p\mathrm{d}Y$$
$$\leqslant 2^p\int_{D(X,\rho)}|u(Y)|^p\mathrm{d}Y,$$

因此

$$[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D,\delta)}\leqslant2\|u\|_{L^{p,\theta}(D;\delta)},$$

亦即 $\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)\supset L^{p,\theta}(D;\delta)$. 反过来设 $u\in\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)$，显然

$$\int_{D(X,\rho)}|u(Y)|^p\mathrm{d}Y$$
$$\leqslant 2^{p-1}\left\{\int_{D(X,\rho)}|u(Y)-u_{X,\rho}|^p\mathrm{d}Y+|u_{X,\rho}|^p||D(X,\rho)|\right\}.$$

对于右端第二项应用引理 2.4，我们得到

$$\int_{D(X,\rho)}|u(Y)|^p\mathrm{d}Y\leqslant C\left\{\int_{D(X,\rho)}|u(Y)-u_{X,\rho}|^p\mathrm{d}Y\right.$$
$$\left.+[|u_D|+\rho^\alpha[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D,\delta)}]^p|D(X,\rho)|\right\}.$$

由范数的定义(1.3) 与(1.5)，可得

$$\|u\|_{L^{p,\theta}(D,\delta)}\leqslant C\{[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D,\delta)}+\|u\|_{L^p(D)}\}$$
$$\leqslant C\|u\|_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D,\delta)},$$

其中 C 依赖于 n,p,θ,A 与 d. 这里和以后的常数 C 只表明它们的依赖关系，而不计其大小.

现在证明第二个结论. 设 $1<\theta\leqslant 1+p/(n+2)$，易证

$$C^\alpha(\overline{D};\delta)\subset\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta),\tag{2.7}$$

其中 $\alpha=(n+2)(\theta-1)/p$.

现在设 $u\in\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta)$. 对于任意正整数 k,m：$k\leqslant m$，由引理 2.3 知

$$|u_{X,2^{-m}\rho}-u_{X,2^{-k}\rho}|\leqslant C(2^{-k}\rho)^\alpha|1-2^{-\alpha k}|[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D,\delta)}.$$

这说明 $\{u_{X,2^{-m}\rho}\}$ 是 Cauchy 序列，它必收敛于某一极限 $\tilde{u}(X)$，在上面不等式中令 $m\to\infty$ 得到

$$|u_{X,2^{-k}\rho}-\tilde{u}(X)|\leqslant C(2^{-k}\rho)^\alpha[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D,\delta)}.\tag{2.8}$$

对于固定的 k，容易看出 $u_{X,2^{-k}\rho}$ 是变量 X 的连续函数，(2.8)式说明当 $k\to\infty$ 时 $u_{X,2^{-k}\rho}$ 关于 X 一致收敛到 $\tilde{u}(X)$，因此 $\tilde{u}(X)$ 在 D 内连续，此外由 Lebesgue 定理，当 $k\to\infty$ 时，

$$u_{X,2^{-k}\rho}\to u(X),\qquad \text{a.e. } X\in D.$$

因此 $u(X)=\tilde{u}(X)$，a.e. $X\in D$. 因而 $\tilde{u}(X)$ 是与 ρ 的选择无关的. 这样式(2.8)可写成：对于任意 $0<\rho\leqslant\operatorname{diam}D$，

$$|u_{X,\rho}-\tilde{u}(X)|\leqslant C\rho^\alpha[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D,\delta)}.\tag{2.9}$$

现在要进一步证明 $\tilde{u}(X)$ 是 Holder 连续的. 对于任意 $X,Y\in D$，取

$\rho = 2\delta(X,Y)$. 由式(2.9),我们有

$$\begin{aligned}&|\tilde{u}(X) - \tilde{u}(Y)|\\ &\quad\leqslant |u_{X,\rho} - \tilde{u}(X)| + |u_{Y,\rho} - \tilde{u}(Y)| + |u_{X,\rho} - u_{Y,\rho}|\\ &\quad\leqslant C\rho^{\alpha}[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D,\delta)} + |u_{X,\rho} - u_{Y,\rho}|.\end{aligned} \tag{2.10}$$

余下只需估计式(2.10)右端的第二项. 对于任意 $Z \in D$,

$$|u_{X,\rho} - u_{Y,\rho}|^p \leqslant 2^{p-1}\{|u_{X,\rho} - \tilde{u}(Z)|^p + |u_{Y,\rho} - \tilde{u}(Z)|^p\},$$

在上式中两边对 Z 在区域 $D(X,\rho) \cap D(Y,\rho)$ 上积分,得到

$$\begin{aligned}&|D(X,\rho) \cap D(Y,\rho)|\,|u_{X,\rho} - u_{Y,\rho}|^p\\ &\quad\leqslant 2^{p-1}\left\{\int_{D(X,\rho)}|u_{X,\rho} - \tilde{u}(Z)|^p\mathrm{d}Z + \int_{D(Y,\rho)}|u_{Y,\rho} - \tilde{u}(Z)|^p\mathrm{d}Z\right\}\\ &\quad\leqslant C\rho^{\theta(n+2)}[u]^p_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D,\delta)}.\end{aligned}$$

注意到 $\rho = 2\delta(X,Y)$, 立即可得

$$|u_{X,\rho} - u_{Y,\rho}| \leqslant C\rho^{\alpha}[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D,\delta)}.$$

代入(2.10),则有

$$|\tilde{u}(X) - \tilde{u}(Y)| \leqslant C\rho^{\alpha}[u]_{\mathscr{L}^{p,\theta}(D,\delta)}.$$

这与式(2.7)结合在一起就得到定理 2.1 中的结论(2). 证毕.

§3 BMO 空间与 $\mathscr{L}^{p,1}(D;\delta)$

现在我们在 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中引进等价的抛物距离

$$\bar{\delta}(X,Y) = \max\{\sup_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i - y_i|, |t_X - t_Y|^{1/2}\}, \tag{3.1}$$

在本节,我们以 $Q_R(X)$ 表示以 X 为心、R 为半径的关于距离 $\bar{\delta}(X,Y)$ 的球,即

$$Q_R(X) = \{Y \in \boldsymbol{R}^{n+1} | \bar{\delta}(X,Y) < R\}, \tag{3.2}$$

亦即

$$\{Y \in \boldsymbol{R}^{n+1} | |x_i - y_i| < R,\ t_X - R^2 < t_Y < t_X + R^2, i = 1,\cdots,n\}.$$

我们称它为 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中关于**抛物距离的立方体**,或简单地说成**立方体**. Q, $Q_0, Q_R, \cdots$ 都表示这样的立方体.

由于 $\delta(X,Y)$ 与 $\bar{\delta}(X,Y)$ 的等价性,对于 $p \geqslant 1, \theta \geqslant 0$ 及 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 的任意(A)型区域 D, 容易验证

$$\mathscr{L}^{p,\theta}(D;\delta) \cong \mathscr{L}^{p,\theta}(D;\bar{\delta}). \tag{3.3}$$

在 § 1 中我们已看到 Morrey 空间有如下的性质：

$$L^{p,1}(D;\delta) \cong L^{\infty}(D).$$

但对于 Campanato 空间上述事实则不成立，仅仅有

$$L^{\infty}(D) \subsetneqq \mathscr{L}^{p,1}(D;\delta).$$

我们将会看到对于 $p \geqslant 1$，如果 D 是立方体，$\mathscr{L}^{p,1}(D;\bar{\delta})$ 实际上就是 John 与 Nirenberg 引入的具有有界平均振幅的函数空间，或简称为 **BMO 空间**.

定义 3.1　设 Q_0 是 $\boldsymbol{R}^{n+1}$的立方体(关于抛物距离)，以 $\mathbf{BMO}(Q_0,\bar{\delta})$ 表示由 $L^1(Q_0)$中满足

$$[u]_{*,Q_0} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sup_{Q} \fint_{Q\cap Q_0} |u(X) - u_{X,\rho}|\mathrm{d}X < \infty \tag{3.4}$$

的所有函数 u 组成的赋范线性空间，其中 Q 的中心位于 Q_0 内. 这样的空间又称为 **John-Nirenberg 空间**. 其上的范数定义为

$$\| u \|_{*,Q_0} = \| u \|_{L^1(Q_0)} + [u]_{*,Q_0}. \tag{3.5}$$

BMO 空间的半模也可定义为

$$[u]_{*,Q_0} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sup_{Q\subset Q_0} \fint_{Q} |u(X) - u_Q|\mathrm{d}X.$$

它与(3.4)的定义是等价的. 由定义直接可以看出

$$\mathscr{L}^{1,1}(Q_0;\bar{\delta}) \cong \mathrm{BMO}(Q_0,\bar{\delta}).$$

下面我们将研究属于 BMO $(Q_0,\bar{\delta})$ 空间的函数的一些特性. 为此需要一些准备知识.

定义 3.2　设 u 是 D 上的可测函数，记集合

$$A_u(s) = \{X \in D \mid |u(X)| > s\},$$

函数

$$\lambda_u(s) = \mathrm{meas}\{A_u(s)\} = |A_u(s)|$$

称为 $u(X)$的**分布函数**.

引理 3.1　设 $u \in L^p(D)$，则

$$\int_D |u|^p \mathrm{d}X = p\int_0^{\infty} s^{p-1}\lambda_u(s)\mathrm{d}s. \tag{3.6}$$

证明　我们可写

$$\int_D |u|^p \mathrm{d}X = \int_D \mathrm{d}X \int_0^{|u(X)|} ps^{p-1}\mathrm{d}s$$
$$= \int_D \mathrm{d}X \int_0^{\infty} ps^{p-1}\chi\{|u(X)|>s\}\mathrm{d}s,$$

其中 $\chi\{A\}$ 表示集合 A 上的特征函数. 利用 Fubini 定理,

$$\int_D |u|^p \mathrm{d}X = \int_0^{\infty} ps^{p-1}\mathrm{d}s \int_D \chi\{|u(X)|>s\}\mathrm{d}X$$
$$= p\int_0^{\infty} s^{p-1}\lambda_u(s)\mathrm{d}s.$$

引理得证.

由此引理,我们可以看出当 $s\to\infty$ 时,$\lambda_u(s)$ 的渐近性质与 u 的可积性是紧密相关的. 我们也可以用分布函数的渐近性态来描述 BMO 空间的函数.

定理 3.2 设 $u\in L^1(Q_0)$,且存在正常数 C_1 与 C_2 使得对于任意 $Q\subset Q_0$,有

$$\mathrm{meas}\{X\in Q \mid |u(X)-u_Q|>s\} \leqslant C_1\exp\{-C_2 s\}|Q|, \tag{3.7}$$

则 $u\in \mathrm{BMO}(Q_0,\delta)$,且

$$[u]_{*,Q_0} \leqslant C_1/C_2. \tag{3.8}$$

证明 由引理 3.1,对于 $Q\subset Q_0$,

$$⨍_Q |u(X)-u_Q|\mathrm{d}X = |Q|^{-1}\int_0^{\infty} \mathrm{meas}\{|u(X)-u_Q|>s\}\mathrm{d}s$$
$$\leqslant |Q|^{-1}\int_0^{\infty} C_1\exp\{-C_2 s\}|Q|\mathrm{d}s$$
$$= C_1/C_2.$$

这蕴含着式(3.8). 证毕.

John 与 Nirenberg 证明了其逆定理:

定理 3.3(John-Nirenberg 定理) 设 $u\in \mathrm{BMO}(Q_0,\delta)$,则存在仅依赖于 n 的正常数 C_1 与 C_2 使得对于任意 $Q\subset Q_0$,都有

$$\mathrm{meas}\{X\in Q \mid |u(X)-u_Q|>s\} \leqslant C_1\exp\left\{\frac{-C_2 s}{[u]_{*,Q_0}}\right\}|Q|. \tag{3.9}$$

为证明此定理,我们将应用 Calderón-Zygmund 分解引理. 这个分解引理十分重要,基于这个分解引理的论证方法在许多重要问题上起着关键性的作用,在后面几章中将屡次用到它.

引理 3.4(Calderón-Zygmund 分解引理) 设 $f \in L^1(Q)$, $f \geqslant 0$, 如果

$$\alpha > \fint_Q f(X)\mathrm{d}X,$$

则存在一族至多可列个互不重叠的立方体 $\{Q_j\}$ 使得

$$\alpha < \fint_{Q_j} f(X)\mathrm{d}X \leqslant 2^{n+2}\alpha \quad (j = 1,2,\cdots), \tag{3.10}$$

$$f(X) \leqslant \alpha, \quad \text{a.e. } X \in Q \setminus \bigcup_j Q_j. \tag{3.11}$$

证明 将 Q 分成全等的 2^{n+2} 个立方体 Q', 对于这样的立方体,有两种情况:

(1) $\fint_{Q'} f(X)\mathrm{d}X \leqslant \alpha$;

(2) $\fint_{Q'} f(X)\mathrm{d}X > \alpha$.

当 Q' 属于第二种情况时将这样的立方体归入立方体族 $\{Q_j\}$, 对于这样的立方体,结论(3.10)成立. 事实上,由引理所设

$$\begin{aligned}\fint_{Q'} f(X)\mathrm{d}X &= |Q'|^{-1}\int_{Q'} f(X)\mathrm{d}X \\ &\leqslant \frac{|Q|}{|Q'|}\fint_Q f(X)\mathrm{d}X \leqslant 2^{n+2}\alpha.\end{aligned}$$

当 Q' 属于第一种情况时,则继续剖分成 2^{n+2} 全等的立方体 Q''. 重复上述步骤,我们得到互不重叠的立方体族 $\{Q_j\}$, 对于每一 Q_j, (3.10) 成立. 当 $X_0 \in Q \setminus \bigcup_j Q_j$ 时,由剖分的过程知道,必存在属于第一种情况的立方体列 $\widetilde{Q}_k$ 使得 $X_0 \in \widetilde{Q}_k (k = 1,2,\cdots)$, $|\widetilde{Q}_k| \to 0$ (当 $k \to \infty$). 由 Lebesgue 微分定理

$$f(X_0) = \lim_{k\to\infty}\fint_{\widetilde{Q}_k} f(X)\mathrm{d}X, \quad \text{a.e. } X_0 \in Q \setminus \bigcup_j Q_j,$$

因为 $\widetilde{Q}_k$ 是属于第一种情况的立方体列,所以(3.11)成立. 引理证毕.

附注 由(3.10)中的第一个不等式,我们可以得到

$$\sum_j |Q_j| \leqslant \alpha^{-1}\int_Q f(X)\mathrm{d}X. \tag{3.12}$$

定理3.3的证明 由于$u \in \mathrm{BMO}(Q_0,\bar{\delta})$，必有$u \in \mathrm{BMO}(Q,\bar{\delta})$，因而只需讨论$Q = Q_0$的情况. 由于不等式关于$u$是齐次的，可不妨设$[u]_{*,Q_0} = 1$. 否则以$v = u/[u]_{*,Q_0}$代替$u$.

对于$\alpha \geqslant 1 = [u]_{*,Q_0} \geqslant \fint_{Q_0}|u(X) - u_{Q_0}|\mathrm{d}X$，应用Calderón-Zygmund分解于$Q_0$，则存在互不重叠的立方体列$\{Q_j^{(1)}\}$使得

$$\alpha < \fint_{Q_j^{(1)}}|u(X) - u_{Q_0}|\mathrm{d}X \leqslant 2^{n+2}\alpha, \tag{3.13}$$

$$|u(X) - u_{Q_0}| \leqslant \alpha, \quad \text{a.e. } Q_0\setminus \bigcup_j Q_j^{(1)}. \tag{3.14}$$

由(3.13)可导出

$$\sum_j |Q_j^{(1)}| \leqslant \alpha^{-1}\int_{Q_0}|u(X) - u_{Q_0}|\mathrm{d}X, \tag{3.15}$$

$$|u_{Q_j^{(1)}} - u_{Q_0}| \leqslant \fint_{Q_j^{(1)}}|u(X) - u_{Q_0}|\mathrm{d}X \leqslant 2^{n+2}\alpha. \tag{3.16}$$

对于任意一个$Q_j^{(1)}$，我们有

$$\alpha \geqslant 1 = [u]_{*,Q} \geqslant \fint_{Q_j^{(1)}}|u(X) - u_{Q_j^{(1)}}|\mathrm{d}X,$$

再次应用Calderón-Zygmund分解于每一个$Q_j^{(1)}$，又可得到互不重叠的立方体列$\{Q_j^{(2)}\}$(对于所有$Q_j^{(1)}$分解后所得到相应的立方体的总和)使得

$$\alpha < \fint_{Q_j^{(2)}}|u(X) - u_{Q_j^{(1)}}|\mathrm{d}X \leqslant 2^{n+2}\alpha, \tag{3.17}$$

$$|u(X) - u_{Q_j^{(1)}}| \leqslant \alpha, \quad \text{a.e. } Q_j^{(1)}\setminus \bigcup_j Q_j^{(2)}, \tag{3.18}$$

由(3.18)与(3.16)

$$\begin{aligned}|u(X) - u_{Q_0}| &\leqslant |u(X) - u_{Q_j^{(1)}}| + |u_{Q_j^{(1)}} - u_{Q_0}| \\ &\leqslant 2\cdot 2^{n+2}\alpha, \quad \text{a.e. } Q_j^{(1)}\setminus \bigcup_j Q_j^{(2)},\end{aligned}$$

联合(3.14)，则有

$$|u(X) - u_{Q_0}| \leqslant 2\cdot 2^{n+2}\alpha, \quad \text{a.e. } Q_0\setminus \bigcup_j Q_j^{(2)}.$$

利用(3.17),

$$\sum_j |Q_j^{(2)}| \leqslant \alpha^{-1} \sum_j \int_{Q_j^{(1)}} |u(X) - u_{Q_j^{(1)}}| \mathrm{d}X.$$

注意到 $[u]_{*,Q_0} = 1$ 与(3.15),有

$$\sum_j |Q_j^{(2)}| \leqslant \alpha^{-1} \sum_j |Q_j^{(1)}|$$

$$\leqslant \alpha^{-2} \int_{Q_0} |u(X) - u_{Q_0}| \mathrm{d}X \leqslant \alpha^{-2} |Q_0|.$$

重复上面的步骤,用归纳法对于任意自然数 k 可得到互不重叠的立方体列 $\{Q_j^{(k)}\}$ 使得

$$|u(X) - u_{Q_0}| \leqslant k \cdot 2^{n+2}\alpha, \quad \text{a.e. } X \in Q_0 \setminus \bigcup_j Q_j^{(k)}, \tag{3.19}$$

$$\sum_j |Q_j^{(k)}| \leqslant \alpha^{-k} |Q_0|. \tag{3.20}$$

对于 $k \geqslant 1$,由(3.19)与(3.20),有

$$\begin{aligned} &\operatorname{meas}\left\{X \in Q_0 \,\middle|\, |u(X) - u_{Q_0}| > k \cdot 2^{n+2}\alpha\right\} \\ &\leqslant \sum_j |Q_j^{(k)}| \leqslant \alpha^{-k} |Q_0|. \end{aligned} \tag{3.21}$$

我们注意到不等式(3.21)的最后结论对于 $k = 0$ 也成立.现在对于任意 $s > 0$,必存在整数 $k \geqslant 0$ 使得

$$k \cdot 2^{n+2}\alpha < s \leqslant (k+1) \cdot 2^{n+2}\alpha,$$

应用(3.21),有

$$\begin{aligned} &\operatorname{meas}\left\{X \in Q_0 \,\middle|\, |u(X) - u_{Q_0}| > s\right\} \\ &\leqslant \operatorname{meas}\left\{X \in Q_0 \,\middle|\, |u(X) - u_{Q_0}| > k \cdot 2^{n+2}\alpha\right\} \\ &\leqslant \alpha^{-k} |Q_0| \leqslant \alpha |Q_0| \exp\left\{\frac{-s \log \alpha}{2^{n+2}\alpha}\right\}. \end{aligned}$$

取定 $\alpha > 1$,定理 3.3 得证.

定理 3.5　如果 $u \in \mathrm{BMO}(Q_0, \bar{\delta})$,则对于 $p \geqslant 1$ 都有 $u \in \mathscr{L}^{p,1}(Q_0; \bar{\delta})$,且

$$[u]_{\mathscr{L}^{p,1}(Q_0, \bar{\delta})} \leqslant C[u]_{*,Q_0}, \tag{3.22}$$

其中 C 仅依赖于 n, p.

证明　由引理 3.1 与定理 3.3,有

$$\fint_Q |u(X)-u_Q|^p \mathrm{d}X = |Q|^{-1}\int_0^\infty ps^{p-1}\,\mathrm{meas}\{|u(X)-u_Q|>s\}\mathrm{d}s$$

$$\leqslant |Q|^{-1}\int_0^\infty C_1 ps^{p-1}\exp\left\{\frac{-C_2 s}{[u]_{*,Q_0}}\right\}|Q|\mathrm{d}s$$

$$= pC_1C_2^{-p}[u]_{*,Q_0}^p\int_0^\infty s^{p-1}\exp\{-s\}\mathrm{d}s \leqslant C[u]_{*,Q_0}^p.$$

由此立即得到(3.22).证毕.

现在我们可以看出,对于 $p \geqslant 1$,

$$\mathscr{L}^{p,1}(D;\delta) \cong \mathscr{L}^{1,1}(D;\delta) \cong \mathrm{BMO}(Q_0,\delta).$$

习 题 一

1. 证明引理 1.1 中的结论(4).

2. 设 $u \in C^\alpha(\overline{D};\delta), v \in C^\alpha(\overline{D};\delta)$, 其中 $\alpha \in (0,1]$, 证明 $uv \in C^\alpha(\overline{D};\delta)$ 且

$$[uv]_\alpha \leqslant |u|_\alpha |v|_\alpha.$$

3. 设 $u \in L^\infty(D)$, 且对于任意 $\rho \in (0,1], X \in D$, 满足

$$\operatorname*{ess\,osc}_{D(X,\rho)} u \stackrel{\text{def}}{=\!=} \operatorname*{ess\,sup}_{D(X,\rho)} u - \operatorname*{ess\,inf}_{D(X,\rho)} u \leqslant C\rho^\alpha,$$

其中 $D(X,\rho)$ 的定义见 §1, $C \geqslant 0$ 是常数,则 $u \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$.

4. 证明在 §3 中 BMO 空间范数两种定义的等价性.

5. 设 $u \in \mathscr{L}^{2,\theta}(D;\delta)$, 证明:

(1) 如果 $0 \leqslant \theta < 1, b \in L^\infty(D)$, 则 $bu \in \mathscr{L}^{2,\theta}(D;\delta)$.

(2) 如果 $\alpha \in (0,1)$, $1 \leqslant \theta \leqslant 1 + \dfrac{2\alpha}{n+2}$, $b \in C^\alpha(D;\delta)$, 则 $bu \in \mathscr{L}^{2,\theta}(D;\delta)$.

6. 设 D 是(A)型区域,对于固定的 $X_0 \in D, 0 < \theta < 1, 1 \leqslant p < \infty$, 记

$$|u|_{L^{p,\theta}_{X_0}} = \left\{\sup_{0<\rho\leqslant d}\frac{1}{|D(X_0,\rho)|^\theta}\int_{D(X_0,\rho)}|u|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p},$$

$$|u|_{\mathscr{L}^{p,\theta}_{X_0}} = \left\{\sup_{0<\rho\leqslant d}\frac{1}{|D(X_0,\rho)|^\theta}\int_{D(X_0,\rho)}|u-u_{X_0,\rho}|^p\mathrm{d}x\right\}^{1/p},$$

其中 $d = \mathrm{diam} D$. 证明

$$|u|_{L^{p,\theta}_{X_0}} \leqslant C|u|_{\mathscr{L}^{p,\theta}_{X_0}} + \|u\|_{L^p}.$$

7. 设 $Q_T = \Omega \times (0,T)$，其中 Ω 是 n 维(A)型有界区域，$Q_R^* = B_R \times (-R^2,0]$，$M_R = B_R \times (0,R^2)$，$\Omega_0 = \Omega \times \{t=0\}$，记

$$\|u\|^*_{L^{p,\theta}(Q_T,\delta)} = \Bigg\{\sup_{\substack{0<R\leqslant d\\ X_0\in Q_T}} \frac{1}{|Q_R^*(X_0)\cap Q_T|^\theta}\int_{Q_R^*(X_0)\cap Q_T}|u|^p\mathrm{d}x$$

$$+\sup_{\substack{0<R\leqslant d\\ X_0\in \Omega_0}} \frac{1}{|M_R(X_0)\cap Q_T|^\theta}\int_{M_R(X_0)\cap Q_T}|u|^p\mathrm{d}X\Bigg\}^{1/p},$$

证明它与定义 1.1 所给出的范数是等价的.

第二章 Sobolev 空间(关于 x 与 t 异性)

本章仅仅讨论关于 x 与 t 两向异性的 Sobolev 空间的一些特殊结果,有关各向同性 Sobolev 空间的定理我们将直接引用,读者可参阅有关的参考书.

§1 $W_p^{l,l/2}(Q_T)$ 空间

设 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的有界区域, Q_T 表示 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 上的柱体 $\Omega\times(0,T]$.

为了抛物型方程的需要,我们将在 t 方向上引入分数次半模. 对于 $0<\alpha<1, p\geqslant 1$, 记

$$[u]_{L^{\alpha}_{p,t}(Q_T)}=\left\{\int_{\Omega}\mathrm{d}x\int_0^T\mathrm{d}t\int_0^T\frac{|u(x,t)-u(x,\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+\alpha p}}\mathrm{d}\tau\right\}^{1/p}. \quad (1.1)$$

附注 事实上,半模(1.1)也可定义在柱体 $\Omega\times(T_1,T_2]$, 其中 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的有界或无界区域, $-\infty\leqslant T_1<T_2\leqslant\infty$. 如果记 $\Delta_{t,h}u(x,t)=u(x,t+h)-u(x,t)$, 对于 $Q=\Omega\times(-\infty,\infty)$, 容易验证

$$[u]_{L^{\alpha}_{p,t}(Q)}=2^{1/p}\left\{\int_0^{\infty}\frac{\|\Delta_{t,h}u\|^p_{L^p(Q)}}{h^{1+\alpha p}}\,\mathrm{d}h\right\}^{1/p}. \quad (1.2)$$

在本书中,函数 $u(x,t)$ 关于空间变量 x 的梯度记为 D_xu 或 Du, 关于 t 的微商记为 D_tu 或 u_t, 对于正整数 l, 通常记

$$|D^lu|=\left\{\sum_{|\beta|=l}|D_x^{\beta}u|^2\right\}^{1/2},$$

$$\|D^lu\|_{L^p(Q_T)}=\left\{\sum_{|\beta|=l}\|D_x^{\beta}u\|^p_{L^p(Q_T)}\right\}^{1/p},$$

其中 β 是多重指标 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$,

$$\beta_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n),\quad |\beta|=\sum_i\beta_i,$$

$$D_x^{\beta}=\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1}\partial x_2^{\beta_2}\cdots\partial x_n^{\beta_n}}.$$

定义 1.1 对于正整数 l 与 $1 \leqslant p < \infty$, 当 l 为偶数时,记

$$\| u \|_{W_p^{l,l/2}(Q_T)} = \Big\{ \sum_{0 \leqslant r+2s \leqslant l} \| D_t^s D_x^r u \|_{L^p(Q_T)}^p \Big\}^{1/p}; \tag{1.3}$$

当 l 为奇数时,记

$$\| u \|_{W_p^{l,l/2}(Q_T)} = \Big\{ \sum_{0 \leqslant r+2s \leqslant l} \| D_t^s D_x^r u \|_{L^p(Q_T)}^p + \sum_{0 \leqslant r+2s \leqslant l-1} [D_t^s D_x^r u]_{L_{p,t}^{1/2}(Q_T)}^p \Big\}^{1/p}. \tag{1.4}$$

以 $W_p^{l,l/2}(Q_T)$ 表示 $L^p(Q_T)$ 中满足

$$\| u \|_{W_p^{l,l/2}(Q_T)} < \infty$$

的函数 u 组成的赋范线性空间,其上赋予范数(1.3)或(1.4).

可以验证 $W_p^{l,l/2}(Q_T)$ 是 Banach 空间.

为简单起见,当 l 为偶数时,记半模

$$[u]_{L_p^{l,l/2}(Q_T)} = \Big\{ \sum_{r+2s=l} \| D_t^s D_x^r u \|_{L^p(Q_T)}^p \Big\}^{1/p};$$

当 l 为奇数时,记

$$[u]_{L_p^{l,l/2}(Q_T)} = \Big\{ \sum_{r+2s=l} \| D_t^s D_x^r u \|_{L^p(Q_T)}^p + \sum_{r+2s=l-1} [D_t^s D_x^r u]_{L_{p,t}^{1/2}(Q_T)}^p \Big\}^{1/p}.$$

事实上,定义 1.1 不限于在有界柱体上定义,也可在无界柱体 Q 上或 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 上定义.

定理 1.1(延拓定理) 设 $\partial\Omega \in C^l$, 则存在延拓算子 P: $W_p^{l,l/2}(Q_T) \longrightarrow W_p^{l,l/2}(\boldsymbol{R}^{n+1})$, 满足

(1) 对于任意 $u \in W_p^{l,l/2}(Q_T)$,

$$Pu(X) = u(X), \qquad \text{a.e. } X \in Q_T;$$

(2) 存在常数 $C > 0$ 使得

$$\| Pu \|_{W_p^{l,l/2}(\boldsymbol{R}^{n+1})} \leqslant C \| u \|_{W_p^{l,l/2}(Q_T)},$$

其中 C 仅依赖于 $n, l, p, (\operatorname{diam}\Omega)^{-1}, T^{-1}$ 与 $\partial\Omega$;

(3) Pu 的支集包含于 $\Omega_d \times (-T, 2T)$, 其中

$$d = \operatorname{diam}\Omega, \quad \Omega_d = \{x \in \boldsymbol{R}^n \,|\, \operatorname{dist}\{x, \Omega\} \leqslant d\}.$$

证明 我们只讨论 l 为奇数的情况,因为当 l 为偶数时方法相仿且更为简单. 现在记 $m = [l/2]$, 首先我们应用 Hestenes-Whitney 方法

将 u 从 Q_T 延拓至 $\widetilde{Q}_T=\Omega\times(-T,T]$ 上,定义

$$\widetilde{u}(x,t)=\begin{cases}u(x,t), & (x,t)\in\Omega\times[0,T],\\ \sum_{k=1}^{m+1}\lambda_k u(x,-t/k), & (x,t)\in\Omega\times(-T,0).\end{cases}\tag{1.5}$$

选取 λ_k 使得

$$\sum_{k=1}^{m+1}\lambda_k\left(-\frac{1}{k}\right)^s=1,\quad s=0,1,2,\cdots,m.\tag{1.6}$$

容易验证,对于 $0\leqslant r+2s\leqslant l$, $(x,t)\in\Omega\times[-T,T]$,

$$D_t^sD_x^r\widetilde{u}(x,t)=\begin{cases}D_t^sD_x^ru(x,t), & t\geqslant 0,\\ \sum_{k=1}^{m+1}\lambda_k\left(-\frac{1}{k}\right)^s(D_t^sD_x^ru)(x,-t/k), & t\leqslant 0,\end{cases}\tag{1.7}$$

因而有

$$\sum_{r+2s=l}\|D_x^rD_t^s\widetilde{u}\|_{L^p(\widetilde{Q}_T)}\leqslant C[u]_{L_p^{l,l/2}(Q_T)},\tag{1.8}$$

其中 C 仅依赖于 n,l,p. 我们将进一步证明

$$\sum_{r+2s=l-1}[D_x^rD_t^s\widetilde{u}]_{L_{p,t}^{1/2}(\widetilde{Q}_T)}\leqslant C[u]_{L_p^{l,l/2}(Q_T)},\tag{1.9}$$

其中 C 仅依赖于 n,l,p. 我们只讨论 $r=0,s=m=[l/2]$ 的情况,其他情况类似. 由(1.1)

$$\begin{aligned}[D_t^s\widetilde{u}]_{L_{p,t}^{1/2}(Q_T)}^p&=\int_\Omega dx\int_{-T}^T dt\int_{-T}^T\frac{|D_t^s\widetilde{u}(x,t)-D_t^s\widetilde{u}(x,\tau)|^p}{|t-\tau|^{1+p/2}}d\tau\\&=\int_\Omega dx\int_0^T dt\int_0^T\cdots d\tau+\int_\Omega dx\int_0^T dt\int_{-T}^0\cdots d\tau\\&\quad+\int_\Omega dx\int_{-T}^0 dt\int_0^T\cdots d\tau+\int_\Omega dx\int_{-T}^0 dt\int_{-T}^0\cdots d\tau\\&\overset{\text{def}}{=\!=}\sum_{i=1}^4 I_i.\end{aligned}\tag{1.10}$$

显然

$$I_1\leqslant[u]_{L_p^{l,l/2}(Q_T)}.$$

注意到式(1.7),我们有

$$I_4=\int_\Omega \mathrm{d}x\int_{-T}^0 \mathrm{d}t\int_{-T}^0 \Phi_4(x,t,\tau)\mathrm{d}\tau,$$

其中

$$\Phi_4(x,t,\tau)$$
$$=\frac{\left|\sum_k \lambda_k(-1/k)^s[D_t^s\tilde{u}(x,-t/k)-D_t^s\tilde{u}(x,-\tau/k)]\right|^p}{|t-\tau|^{1+p/2}}.$$

这样 I_4 被以下的量所控制:

$$C\sum_k\int_\Omega \mathrm{d}x\int_{-T}^0 \mathrm{d}t\int_{-T}^0 \frac{|D_t^s\tilde{u}(x,-t/k)-D_t^s\tilde{u}(x,-\tau/k)|^p}{|t-\tau|^{1+p/2}}\mathrm{d}\tau.$$

作变数替换 $(-t/k,-\tau/k)\to(t,\tau)$ 之后得到

$$I_4\leqslant C[u]_{L_p^{l,l/2}(Q_T)}.$$

现在估计 I_2,应用式(1.6)与(1.7),

$$I_2=\int_\Omega \mathrm{d}x\int_0^T \mathrm{d}t\int_{-T}^0 \frac{\left|\sum_k \lambda_k(-1/k)^s[D_t^s\tilde{u}(x,t)-D_t^s\tilde{u}(x,-\tau/k)]\right|^p}{|t-\tau|^{1+p/2}}\mathrm{d}\tau$$
$$\leqslant C\sum_k\int_\Omega \mathrm{d}x\int_0^T \mathrm{d}t\int_0^{T/k}\frac{|D_t^s\tilde{u}(x,t)-D_t^s\tilde{u}(x,\tau)|^p}{|t+k\tau|^{1+p/2}}\mathrm{d}\tau$$
$$\leqslant C[u]_{L_p^{l,l/2}(Q_T)}.$$

I_3 的估计与 I_2 类似,综合以上各项估计,(1.9)式得证. 于是我们有

$$\|\tilde{u}\|_{W_p^{l,l/2}(Q_T)}\leqslant C\|u\|_{W_p^{l,l/2}(Q_T)},$$

其中 C 依赖于 n,l,p. 类似地我们可将 u 延拓到 $\Omega\times(-T,2T)$, 然后再乘以截断函数 $\zeta(t)\in C_0^\infty(-T,2T)$ 使得当 $t\in[0,T]$ 时 $\zeta(t)=1$, 这样我们可以得到延拓算子

$$\tilde{P}:W_p^{l,l/2}(Q_T)\to W_p^{l,l/2}(Q),$$

其中 $Q=\Omega\times(-\infty,\infty)$.

(1) 当 $(x,t)\in Q_T$ 时, $u(x,t)=\tilde{P}u(x,t)$, $\tilde{P}u(x,t)$ 的支集包含于 $\bar{\Omega}\times[-T,2T]$ 之中;

(2) 满足估计

$$\|\tilde{P}u\|_{W_p^{l,l/2}(Q_T)}\leqslant C\|u\|_{W_p^{l,l/2}(Q_T)},$$

其中 C 仅依赖于 n,p,l,T^{-1}.

关于 x 方向上的延拓可应用通常的 Sobolev 空间的方法,将 $\partial\Omega$ 局部展平,并应用上面提到的 Hestenes-Whitney 方法延拓,最后用单位分解粘结起来. 证毕.

定理 1.2(内插不等式) 设 $\partial\Omega\in C^l$, $u\in W_p^{l,l/2}(Q_T)$,则对于任意 $\varepsilon\in(0,1]$, $0<r+2s=\mu<l$, 我们有

$$\| D_t^s D_x^r u \|_{L^p(Q_T)} \leqslant \varepsilon[u]_{L_p^{l,l/2}(Q_T)} + \frac{C}{\varepsilon^{\mu/(l-\mu)}}\| u \|_{L^p(Q_T)}, \quad (1.11)$$

其中 C 只依赖于 $n,l,p,\partial\Omega,(\mathrm{diam}\Omega)^{-1},T^{-1}$.

证明 对于 $r<l$, $s<m$, 由普通的 Sobolev 空间的内插不等式可以得到: 对于 $\forall\,\varepsilon\in(0,1]$,

$$\| D_x^r u \|_{L^p(Q_T)} \leqslant \varepsilon \| D_x^l u \|_{L^p(Q_T)} + \frac{C}{\varepsilon^{r/(l-r)}}\| u \|_{L^p(Q_T)}, \quad (1.12)$$

$$\| D_t^s u \|_{L^p(Q_T)} \leqslant \varepsilon \| D_t^m u \|_{L^p(Q_T)} + \frac{C}{\varepsilon^{s/(m-s)}}\| u \|_{L^p(Q_T)}; \quad (1.13)$$

对于 $0<r+2s=\mu<l$, 应用(1.12)式,有

$$\| D_x^r D_t^s u \|_{L^p(Q_T)} \leqslant \varepsilon \| D_x^{l-2s} D_t^s u \|_{L^p(Q_T)} + \frac{C}{\varepsilon^{r/(l-\mu)}}\| D_t^s u \|_{L^p(Q_T)}. \quad (1.14)$$

当 l 为偶数时,对不等式(1.14)右端第二项应用(1.13)($m=l/2$),则

$$\| D_x^r D_t^s u \|_{L^p(Q_T)} \leqslant \varepsilon \| D_x^{l-2s} D_t^s u \|_{L^p(Q_T)} + \frac{C}{\varepsilon^{r/(l-\mu)}}\Big[\delta \| D_t^m u \|_{L^p(Q_T)} + \frac{C}{\delta^{2s/(l-2s)}}\| u \|_{L^p(Q_T)}\Big].$$

取 $\delta=C^{-1}\varepsilon^{(l-2s)/(l-\mu)}$, 以 ε 代替 2ε, 则对于任意 $\varepsilon\in(0,1]$ 有(1.11)式成立. 这样,当 l 为偶数时定理得证.

现在设 l 为奇数. 我们先证明对于 $Q=\Omega\times(-\infty,\infty)$, $u\in W_p^{l,l/2}(Q_T)$ 且支集包含在 $\overline{\Omega}\times[-T,2T]$ 中有

$$\| D_t^s D_x^r u \|_{L^p(Q)} \leqslant \varepsilon[u]_{L_p^{l,l/2}(Q)} + \frac{C}{\varepsilon^{\mu/(l-\mu)}}\| u \|_{L^p(Q)}, \quad (1.15)$$

其中 $r+2s=\mu<l$, $\varepsilon\in(0,1)$, $C\geqslant 1$ 只依赖于 $n,l,p,\partial\Omega$.

为此先证明

$$\| D_t u \|_{L^p(Q)} \leqslant \varepsilon [D_t u]_{L^{1/2}_{p,t}(Q)} + \frac{C}{\varepsilon^2} \| u \|_{L^p(Q)}. \tag{1.16}$$

事实上,我们可写

$$D_t u(x,t) = D_t u(x,t+h) - \big(D_t u(x,t+h) - D_t u(x,t)\big),$$

上式关于 h 从 0 至 ε 积分,则有

$$|D_t u(x,t)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon} |u(x,t+\varepsilon) - u(x,t)| + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon |D_t u(x,t+h) - D_t u(x,t)| \mathrm{d}h.$$

因此

$$\| D_t u \|_{L^p(Q)} \leqslant \frac{2}{\varepsilon} \| u \|_{L^p(Q)} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \| \Delta_h D_t u \|_{L^p(Q)} \mathrm{d}h,$$

其中 $\Delta_h D_t u = D_t u(x,t+h) - D_t u(x,t)$. 应用 Holder 不等式,有

$$\| D_t u \|_{L^p(Q)} \leqslant \frac{2}{\varepsilon} \| u \|_{L^p(Q)} + \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_0^\varepsilon \frac{\| \Delta_h D_t u \|^p_{L^p(Q)}}{h^{1+p/2}} \mathrm{d}h\right)^{1/p} \left(\int_0^\varepsilon h^{p'(1+p/2)} \mathrm{d}h\right)^{1/p'},$$

这里 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. 简单的计算表明(注意到式(1.2))

$$\| D_t u \|_{L^p(Q)} \leqslant C\varepsilon^{1/2} [D_t u]_{L^{1/2}_{p,t}} + \frac{2}{\varepsilon} \| u \|_{L^p(Q)},$$

这里 ε 是任意正数,式(1.16)得证.

现在记 $m = [l/2]$. 应用式(1.16)得

$$\| D_t^m u \|_{L^p(Q)} \leqslant \varepsilon [D_t^m u]_{L^{1/2}_{p,t}(Q)} + \frac{C}{\varepsilon^2} \| D_t^{m-1} u \|_{L^p(Q)}, \tag{1.17}$$

又应用式(1.13),我们有

$$\| D_t^{m-1} u \|_{L^p(Q)} \leqslant \delta \| D_t^m u \|_{L^p(Q)} + \frac{C}{\delta^{m-1}} \| u \|_{L^p(Q)},$$

代入式(1.17),并取 $\delta = \frac{\varepsilon^2}{2C}$, 则有

$$\| D_t^m u \|_{L^p(Q)} \leqslant \varepsilon [D_t^m u]_{L^{1/2}_{p,t}(Q)} + \frac{1}{2} \| D_t^m u \|_{L^p(Q)} + \frac{C}{\varepsilon^{l-1}} \| u \|_{L^p(Q)}.$$

由此立得

$$\| D_t^m u \|_{L^p(Q)} \leqslant 2\varepsilon [D_t^m u]_{L^{1/2}_{p,t}(Q)} + \frac{C}{\varepsilon^{l-1}} \| u \|_{L^p(Q)}. \tag{1.18}$$

对于 $s < m = [l/2]$，应用估计式(1.13)，有

$$\| D_t^s u \|_{L^p(Q)} \leqslant \varepsilon \| D_t^m u \|_{L^p(Q)} + \frac{C}{\varepsilon^{s/(m-s)}} \| u \|_{L^p(Q)},$$

将(1.18)代入，可得

$$\| D_t^s u \|_{L^p(Q)} \leqslant \varepsilon \left(\delta [D_t^m u]_{L^{1/2}_{p,t}(Q)} + \frac{C}{\delta^{l-1}} \| u \|_{L^p(Q)} \right) + \frac{C}{\varepsilon^{s/(m-s)}} \| u \|_{L^p(Q)}.$$

对于任意 $\sigma \in (0,1]$，取

$$\varepsilon = \sigma^{\frac{l-1-2s}{l-2s}}, \quad \delta = \sigma^{\frac{1}{l-2s}},$$

则

$$\| D_t^s u \|_{L^p(Q)} \leqslant \sigma [D_t^k u]_{L^{1/2}_{p,t}(Q)} + \frac{C}{\sigma^{2s/(l-2s)}} \| u \|_{L^p(Q)}.$$

对于 $0 < r + 2s = \mu < l$，代入(1.14)(以 Q 代替 Q_T)，适当地选取 σ，可得

$$\| D_x^r D_t^s u \|_{L^p(Q)} \leqslant \varepsilon [u]_{L_p^{l,l/2}(Q)} + \frac{C}{\varepsilon^{\mu/(l-\mu)}} \| u \|_{L^p(Q)}. \tag{1.19}$$

现在设 $u \in W_p^{l,l/2}(Q_T)$，可以将 u 延拓为 $\tilde{u} \in W_p^{l,l/2}(Q)$ 使得

$$\begin{aligned} \| \tilde{u} \|_{W^{l,l/2}(Q)} &\leqslant \| u \|_{W_p^{l,l/2}(Q_T)} \\ &\leqslant C \left\{ [u]_{L_p^{l,l/2}(Q_T)} + \sum_{0 \leqslant r+2s<l} \| D_t^s D_x^r u \|_{L^p(Q_T)} \right\}. \end{aligned}$$

对于 $\tilde{u}$，式(1.19)成立，将上式代入式(1.19)后得到：对于 $0 < r + 2s = \mu < l$，有

$$\begin{aligned} \| D_t^s D_x^r u \|_{L^p(Q_T)} &\leqslant \varepsilon C \| u \|_{W_p^{l,l/2}(Q_T)} + \frac{C}{\varepsilon^{\mu/(l-\mu)}} \| u \|_{L^p(Q_T)} \\ &\leqslant \varepsilon C [u]_{L_p^{l,l/2}(Q)} + \varepsilon C \sum_{0 \leqslant \rho+2\sigma<l} \| D_t^\sigma D_x^\rho u \|_{L^p(Q_T)} \\ &\quad + \frac{C}{\varepsilon^{\mu/(l-\mu)}} \| u \|_{L^p(Q_T)}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

取 $\delta = (C\varepsilon)^{1/(l-\mu)}$，则有

$$\begin{aligned} &\sum_{0 \leqslant r+2s<l} \delta^\mu \| D_t^s D_x^r u \|_{L^p(Q_T)} \\ &\leqslant \delta^l [u]_{L_p^{l,l/2}(Q)} + \delta^l C \sum_{0 \leqslant \rho+2\sigma<l} \| D_t^\sigma D_x^\rho u \|_{L^p(Q_T)} + C \| u \|_{L^p(Q_T)}; \end{aligned}$$

这就是所要的. 引理证毕.

定理 6.2 设 $a(x,t,p)$ 满足结构条件(5.3)～(5.6)及(6.1)，$u\in V_2^{1,0}(Q_T)$ 满足方程(5.1)，$Q'\subset\subset Q_T$，则 $Du\in C^{\alpha,\alpha/2}(Q')$ 且

$$[Du]_\alpha\leqslant C\frac{1}{R_0^{n+2+2\alpha}}[\Phi(X_0,R_0;u)+B],\tag{6.29}$$

其中 $R_0=\frac{1}{2}\mathrm{dist}\{Q',\partial_p Q_T\}$，$C,B$ 仅依赖于 n,T,R_0 及结构条件的常数.

这是引理 6.1 很直接的推论.

我们考虑带有边界的邻域，记 $B_R^+(x_0)=B_R(x_0)\cap\{x_n>0\}$，$Q_R^+(X_0)=B_R^+(x_0)\times(t_0-R^2,t_0)$，又记 $Q_{2,T}^+=B_2^+\times(0,T]$，$\Sigma_{2,T}=\{B_2\cap\{x_n=0\}\}\times(0,T]$. 此外，还记

$$\Phi^+(X_0,\rho;v)=\sum_{s=1}^{n-1}\int_{Q_\rho^+(X_0)}|D_s v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{Q_\rho^+(X_0)}|D_n v-(D_n v)_\rho^+|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\tag{6.30}$$

其中

$$(D_n v)_\rho^+=\fint_{Q_\rho^+(X_0)}D_n v\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

引理 6.3 设 $a(x,t,p)$ 满足结构条件(5.3)～(5.6)及(6.1)，$X_0\in\Sigma_{1,T}$，$Q_R^+(X_0)\subset Q_{2,T}^+(R\leqslant 1)$，$u\in V_2^{1,0}(Q_{2,T}^+)$ 是方程(5.1)的弱解，且在 $\Sigma_{2,T}$ 上 $u=0$，则对于任意 $0<\rho\leqslant R\leqslant R_0(R_0\leqslant 1)$，$X_0\in\Sigma_{1,T}$，我们有

$$\Phi^+(X_0,\rho;u)\leqslant C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+3+\alpha}\Phi^+(X_0,R;u)+BR^{n+2+2\alpha},\tag{6.31}$$

其中 C,B 仅依赖于 n,T 及结构条件的常数.

证明 与引理 6.1 的证明一样，考虑 $v\in V_2^{1,0}\cap W_2^{2,1}(Q_R^+(X_0))$ 满足以下初边值问题：

$$\begin{cases}v_t-D_i(a^i(X_0,Dv))=0, & (x,t)\in Q_R^+(X_0),\\ v=u, & (x,t)\in\partial_p Q_R^+(X_0).\end{cases}\tag{6.32}$$

由 §5 的结果，存在 $\sigma\in(0,1)$ 使得

$$|Dv|_{C^{\sigma,\sigma/2}(Q_{R/2}^+)}\leqslant\frac{C}{R^\sigma}\left(\int_{Q_R^+(X_0)}(1+|Du|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1/2}.\tag{6.33}$$

现在记 $w_s = D_s v$ $(s = 1,2,\cdots,n-1)$. 函数 w_s 满足方程

$$D_t w_s - D_i\left(\frac{\partial a^i}{\partial p_j}(x_0,t_0,Dv)D_j w_s\right) = 0.$$

将上面方程写成

$$D_t w_s - D_i\left(\frac{\partial a^i}{\partial p_j}(x_0,t_0,Dv(X_0)D_j w_s\right) = D_i f^i(x,t), \quad (6.34)$$

其中

$$f^i = \left(\frac{\partial a^i}{\partial p_j}(x_0,t_0,Dv(x,t)) - \frac{\partial a^i}{\partial p_j}(x_0,t_0,Dv(X_0))\right)D_j w_s.$$

(6.35)

类似于引理 6.1 的证明,注意到在 $\Sigma_{2,T}$ 上 $w_s = 0$ $(s=1,2,\cdots,n-1)$可得

$$\int_{Q_\rho^+(X_0)} |Dw_s|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C\left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} + \omega^2(r)\right]\int_{Q_r^+(X_0)} |Dw_s|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

(6.36)

其中 $\omega(r)$ 同(6.15). 根据第四章引理 3.1 存在常数 $0<\nu\leqslant 1/2$, 使得如果 $r\leqslant \nu R$, 对于 $s = 1,2,\cdots,n-1$, 我们有

$$\int_{Q_\rho^+(X_0)} |Dw_s|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+1+\alpha}\int_{Q_r(X_0)} |Dw_s|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

特别地,取 $r = \nu R$, 对于 $s = 1,2,\cdots,n-1$, 我们得到

$$\int_{Q_\rho^+(X_0)} |Dw_s|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+1+\alpha}\int_{Q_{R/2}^+(X_0)} |Dw_s|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t. \quad (6.37)$$

它蕴含着

$$\int_{Q_\rho^+(X_0)} \sum_{(i,j)\neq(n,n)} |D_{ij}v|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+1+\alpha}\int_{Q_R^+(X_0)} \sum_{(i,j)\neq(n,n)} |D_{ij}v|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

(6.38)

由第二章定理 3.2 的附注,

$$\Phi^+(X_0,\rho;v) \leqslant C\rho^2\int_{Q_{2\rho}^+(X_0)} [|D^2v|^2 + |D_t v|^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \quad (6.39)$$

上面的右端项我们尚缺少 $D_{nn}v$ 与 $D_t v$ 的相应估计. 由于 v 在 $Q_R^+(X_0)$ 上几乎处处满足方程(6.19),因此只需得到其中一项的估计. 记 $w =$

$\dfrac{v(x,t+h)-v(x,t)}{h}$，我们知道 $w(x,t)$ 满足方程

$$w_t - D_i\left(\tilde{a}^{ij}(x,t)D_j w\right) = 0, \tag{6.40}$$

其中

$$\tilde{a}^{ij}(x,t) = \int_0^1 \frac{\partial a^i}{\partial p_j}\left(X_0, \tau Dv(x,t+h) + (1-\tau)Dv(x,t)\right)\mathrm{d}\tau.$$

注意到在 $\Sigma_{3/2,T}$ 上 $w=0$，与(6.37)一样的推导，对于任意 $0<\rho\leqslant R/4$ 可得

$$\int_{Q_\rho^+(X_0)} |Dw|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+1+\alpha} \int_{Q_{R/2}^+(X_0)} |Dw|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{6.41}$$

应用 Poincaré 不等式

$$\begin{aligned}\int_{Q_\rho^+(X_0)} |w|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t &\leqslant C\rho^2 \int_{Q_{2\rho}^+(X_0)} |Dw|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &\leqslant C\rho^2\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+1+\alpha} \int_{Q_{R/2}^+(X_0)} |Dw|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

由方程(6.40)，$w(x,t)$ 满足 Caccioppoli 不等式

$$\int_{Q_{R/2}^+(X_0)} |Dw|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant CR^{-2} \int_{Q_R^+(X_0)} |w|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

联合上面两式我们得到

$$\int_{Q_\rho^+(X_0)} |w|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+3+\alpha} \int_{Q_R^+(X_0)} |w|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

此时令 $h\to 0$，上式就蕴含着

$$\int_{Q_\rho^+(X_0)} |D_t v|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+3+\alpha} \int_{Q_R^+(X_0)} |D_t v|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{6.42}$$

由(6.38)，(6.42)与方程(6.19)，可得

$$\Phi^+(X_0,\rho;v) \leqslant C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+3+\alpha} \Phi^+(X_0,R;v).$$

然后按引理 6.1 的证明步骤可以得到本引理的结论. 证毕.

最后我们还有两类含有抛物边界的邻域. 对于 $X_0=(x_0,0)$，考虑 $M_R(X_0)=B_R(x_0)\times(0,R^2]$，另一类是对于 $X_0=(x_0',0,0)$，其中 $x_0' = (x_1^0,\cdots,x_{n-1}^0)$. 考虑 $M_R^+(X_0)=B_R^+(x_0',0)\times(0,R^2]$，记

$$\Phi_M(X_0,\rho;u)=\int_{M_\rho(X_0)}|Du|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{6.43}$$

$$\Phi_M^+(X_0,\rho;u)=\int_{M_\rho^-(X_0)}|Du|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{6.44}$$

引理 6.3′　设 $a(x,t,p)$ 满足结构条件(5.3)～(5.6)及(6.1), $X_0\in Q_{1,0}^+$, $M_{R_0}(X_0)\subset Q_{2,T}^+(R\leqslant R_0\leqslant 1)$, $u\in V_2^{1,0}(Q_{2,T}^+)$ 是方程(5.1)的弱解,且 $u|_{t=0}=0$. 则对于任意 $0<\rho\leqslant R\leqslant R_0$, 我们有

$$\Phi_M(X_0,\rho;u)\leqslant C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+3+\alpha}\Phi_M(X_0,R;u)+BR^{n+2+2\alpha}, \tag{6.45}$$

其中 C,B 仅依赖于 n,T 及结构条件的常数.

引理 6.3″　设 $a(x,t,p)$ 满足结构条件(5.3)～(5.6)及(6.1), $X_0\in\{x_n=0\}\cap\{t=0\}$, 设 $M_R^+(X_0)\subset Q_{2,T}^+(R\leqslant 1)$, $u\in V_2^{1,0}(Q_{2,T}^+)$ 是方程(5.1)的弱解,且 $u|_{x_n=0}=0$, $u|_{t=0}=0$, 则对于任意 $0<\rho\leqslant R\leqslant R_0$, 我们有

$$\Phi_M^+(X_0,\rho;u)\leqslant C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+3+\alpha}\Phi_M^+(X_0,R;u)+BR^{n+2+2\alpha}, \tag{6.46}$$

其中 C,B 仅依赖于 n,T 及结构条件的常数.

这两个引理我们留给读者作为练习给出证明.

定理 6.4　设 $a(x,t,p)$ 满足结构条件(5.3)～(5.6)及(6.1), $u\in V_2^{1,0}(Q_{2,T}^+)$ 满足方程(5.1),则 $Du\in C^{\alpha,\alpha/2}(Q_{1,T}^+)$ 且

$$[Du]_{\alpha,Q_{1,T}^+}\leqslant C, \tag{6.47}$$

其中 C 仅依赖于 n,T 及结构条件的常数.

证明　对于 $X_0\in Q_{2,T}^+$, 记 $d=x_n^0$, 即 X_0 到边界 $\Sigma_{2,T}$ 的距离. 我们分成四种情况:

(1) 如果 $\frac{R_0}{2}\leqslant d$ 与 $t_0\geqslant\frac{R_0^2}{2}$, 此时 $Q_{\frac{R_0}{2}}(X_0)\subset Q_{2,T}^+$, 应用引理 6.1, 对于任意 $0<\rho\leqslant R\leqslant\frac{R_0}{2}$, 有

$$\Phi(X_0,\rho;u)\leqslant C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+3+\alpha}\Phi(X_0,R;u)+BR^{n+2+2\alpha},$$

由第四章引理 3.1 我们可以得到

$$\Phi(X_0,\rho;u)\leqslant C\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{n+2+2\alpha}\left[\Phi\left(X_0,\frac{R_0}{2};u\right)+BR_0^{n+2+2\alpha}\right].\tag{6.48}$$

(2) 如果 $d<\dfrac{R_0}{2}$ 与 $t_0\geqslant\dfrac{R_0^2}{2}$，对于任意 $0<\rho\leqslant d$，由于 $Q_d(X_0)\subset Q_{2,T}^+$，应用引理 6.1 可得

$$\Phi(X_0,\rho;u)\leqslant C\left(\frac{\rho}{d}\right)^{n+3+\alpha}\Phi(X_0,d;u)+Bd^{n+2+2\alpha}.$$

同样利用第四章引理 3.1,对于任意 $0<\rho\leqslant\dfrac{d}{2}$，则有

$$\Phi(X_0,\rho;u)\leqslant C\left(\frac{\rho}{d}\right)^{n+2+2\alpha}[\Phi(X_0,d;u)+Bd^{n+2+2\alpha}].$$

记 X_0 到边界 $\Sigma_{2,T}$ 的投影为 $Y_0=(x_0',0,t_0)$，则

$$\Phi(X_0,d;u)\leqslant C\Phi^+(Y_0,2d;u).\tag{6.49}$$

类似地,利用引理 6.3，

$$\Phi^+(Y_0,2d;u)\leqslant C\left(\frac{d}{R_0}\right)^{n+2+2\alpha}[\Phi^+(Y_0,R_0;u)+BR_0^{n+2+2\alpha}].\tag{6.50}$$

联合(6.49)与(6.50),对于任意 $0<\rho\leqslant R_0$ 我们得到

$$\Phi(X_0,\rho;u)\leqslant C\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{n+2+2\alpha}[\Phi^+(Y_0,R_0;u)+BR_0^{n+2+2\alpha}],\tag{6.51}$$

其中

$$\Phi(X_0,\rho;u)=\int_{Q_\rho(X_0)\cap Q_{2,T}^+}\left(\sum_{s=1}^{n-1}|D_su|^2+|D_nu-(D_nu)_\rho|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

(3) 如果 $d>R_0$ 与 $t_0<R_0^2$. 设 X_0 在 $Q_{2,0}^+$ 的投影为 $Z_0=(x_0,0)$，记 $\tau=\sqrt{t_0}$. 首先对于任意 $0<\rho\leqslant\tau$，由引理 6.1,我们有

$$\Phi(X_0,\rho;u)\leqslant C\left(\frac{r}{\tau}\right)^{n+2+2\alpha}[\Phi(X_0,\tau;u)+B\tau^{n+2+2\alpha}].\tag{6.52}$$

类似地,我们有

$$\Phi(X_0,\tau;u)\leqslant C\Phi_M(Z_0,2\tau;u),$$

其中 C 只依赖于 n. 应用引理 6.3′，

$$\Phi_M(Z_0,2\tau;u)\leqslant C\left(\frac{\tau}{R_0}\right)^{n+2+2\alpha}\left[\Phi_M(Z_0,R_0;u)+BR_0^{n+2+2\alpha}\right]. \tag{6.53}$$

这样对于任意 $\rho\in(0,R_0)$ 可得

$$\Phi(X_0,\rho;u)\leqslant C\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{n+2+2\alpha}\left[\Phi_M(Z_0,R_0;u)+BR_0^{n+2+2\alpha}\right].$$

(4) 如果 $d\leqslant R_0$ 与 $t_0\leqslant R_0^2$. 设 X_0 在 $\Sigma_{2,0}$的投影为 $P_0=(x_0',0,0)$. X_0 与 P_0 的抛物距离为 $\delta_0=\max\{d,\sqrt{t_0}\}$，又记 $\delta_1=\min\{d,\sqrt{t_0}\}$. 这样对于 $0<\rho<\delta_1$ 应用引理 6.1，然后当 $\delta_1\leqslant\rho\leqslant\delta_0$ 时我们就应用引理 6.3 或引理 6.3′，就如同上面的情况(2)或情况(3). 最后当 $\delta_0<\rho\leqslant R_0$ 时应用引理 6.3″. 这样我们就可以得到定理的结论.

综合定理 6.2 的内估计与定理 6.4 的边界附近的估计，利用边界局部展平的方法就可以得到 D_xu 的全局 $C^{\alpha,\alpha/2}$估计，这里不再赘述.

第九章　完全非线性方程

在第七章我们介绍了 Krylov-Safonov 估计，他们的这一结果奠定了研究完全非线性方程的基础. 在得此结果之后，Krylov 又比较系统地研究了抛物型完全非线性方程的古典解的存在性，他的方法有一些独特之处，我们在这里主要采用他的方法来介绍和讨论在自然结构条件下非散度型二阶完全非线性抛物型方程的理论. 当然其中也有一些是我们补上的结果和证明. 在 § 11 中关于凝固法的技巧及用多项式逼近来获得 $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}$ 的估计是属于 Caffarelli 的.

设 Ω 是 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的有界开区域，$\mathscr{S}^n$ 是由 n 阶对称矩阵组成的空间，$F(x,t,z,p,r)$ 是定义于 $\Gamma = \Omega \times (0,T] \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}^n \times \mathscr{S}^n$ 上的函数，我们将讨论

$$u_t - F(x,t,u,Du,D^2u) = 0. \tag{0.1}$$

一般而言，关于函数 F 将作如下假定：

(1) 存在 $\Lambda \geqslant \lambda > 0$，使得对于任意 $(x,t,z,p,r) \in \Gamma$，有

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2, \quad \forall\, \xi \in \boldsymbol{R}^n;$$

(2) $F(x,t,z,p,r)$ 关于变量 r 是凹的；

(3) $F(x,t,z,p,r)$ 满足自然结构条件. 以后我们在每小节给出自然结构条件的确切叙述.

§ 1　Hölder 模估计的基本引理

在研究完全非线性方程的 $C^{2+\alpha}$ 估计时 Krylov 给出了一个基本引理，将解及其导数的 Hölder 模估计的不同方法统一到这个引理.

我们仍然在 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 应用抛物距离，对于 $X = (x,t_X), Y = (y,t_Y) \in \boldsymbol{R}^{n+1}$，它们的抛物距离是

$$d(X,Y) = \max\{\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i - y_i|, |t_X - t_Y|^{1/2}\}.$$

记柱体

$$Q_R = \{(x,t) \mid |x_i| < R(i = 1,2,\cdots,n),\ -R^2 < t \leqslant 0\}. \tag{1.1}$$

在 Q_R 上考虑线性抛物型算子

$$Lv = v_t - a^{ij}D_{ij}v + b^iD_iv, \tag{1.2}$$

并假定存在常数 $\Lambda \geqslant \lambda > 0$ 使得对于任意 $(x,t) \in Q_R, \xi \in \boldsymbol{R}^n$ 有

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant a^{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2, \tag{1.3}$$

$$\| a^{ij} \|_{\infty,Q_R},\ \| b^i \|_{\infty,Q_R} \leqslant \Lambda \quad (i,j = 1,2,\cdots,n). \tag{1.4}$$

这样我们将有下面适用于各阶导数 Holder 模估计的基本引理.

基本引理 1.1 对于某个 $R_0 \in (0,1]$，设 $u_l \in W^{2,1}_{n+1}(Q_{R_0}) \cap L^\infty(Q_{R_0})$，$m_l \leqslant u_l \leqslant M_l(l = 1,2,\cdots,N)$，$\{u_l\}$ 满足

$$L_lu_l \leqslant K_1(l = 1,2,\cdots,N), \tag{1.5}$$

其中 L_l 是形如(1.2)并且满足(1.3)，(1.4)的抛物型算子. 又设 $f_l \in C^1[m_l,M_l]$，$f_l' > 0(l = 1,2,\cdots,N)$，且存在 $\alpha \in (0,1),\delta > 0,K_2 > 0$ 使得对于任意 $X,Y \in Q_{R_0}$，有

$$K_2\left(\frac{d(X,Y)}{R_0}\right)^\alpha \geqslant \delta\sum_{l=1}^N[f_l(u_l(X)) - f_l(u_l(Y))]_+ - \sum_{l=1}^N[f_l(u_l(X)) - f_l(u_l(Y))]_-, \tag{1.6}$$

则存在 $\beta \in (0,\alpha],C > 0$ 使得

$$\sum_{l=1}^N \underset{Q_R}{\operatorname{osc}}\, u_l \leqslant C\left(\frac{R}{R_0}\right)^\beta\left[K_2 + K_1 + 1 + \sum_{l=1}^N \underset{Q_{R_0}}{\operatorname{osc}}\, u_l\right]. \tag{1.7}$$

当 $f_l(t) = t\ (l = 1,2,\cdots,N)$ 时，指数 β 与常数 C 仅依赖于 $n,N,\lambda,\Lambda,\delta$ 与 α；当 $f(t)$ 为一般函数时，则 β,C 除上述量外还要依赖于 f_l' 在 $[m_l,M_l]$ 的正上下界，$[f]_+ = \max\{f,0\},[f]_- = [-f]_+$.

附注 当 $f_l(t) = t,\delta = 1$ 时，条件(1.6)可写成

$$K_2\left(\frac{d(X,Y)}{R_0}\right)^\alpha \geqslant \sum_{l=1}^N u_l(X) - \sum_{l=1}^N u_l(Y),$$

调换 X 与 Y，则可得

$$\left|\sum_{l=1}^{N}u_l(X)-\sum_{l=1}^{N}u_l(Y)\right|\leqslant K_2\left(\frac{d(X,Y)}{R_0}\right)^{\alpha}.$$

也就是说这时条件(1.6)(当 $\delta=1$ 时)等价于和函数 $\sum\limits_{i=1}^{N}u_l(x,t)$ 是 Holder 连续的.

为证明这个基本引理 1.1,我们需要下面两个辅助引理.

引理 1.2 设 $\omega_i(\rho)(i=1,2,\cdots,N)$ 是定义于 $(0,\rho_0)$ 的非负非减函数,对于每一个 $\rho\in(0,\rho_0/2)$ 存在指标集 $A(\rho)\subset\{1,2,\cdots,N\}$ (可以是空集)使得 $\omega(\rho)$ 满足以下性质:对于任意 $\rho\in(0,\rho_0/2)$,

$$\sum_{i\in A(\rho)}\omega_i(\rho)\leqslant\gamma\sum_{i\in A(\rho)}\omega_i(2\rho)+C_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\alpha},\tag{1.8}$$

$$\sum_{i\notin A(\rho)}\omega_i(\rho)\leqslant C_1\left[\sum_{i\in A(\rho)}\omega_i(2\rho)+\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\alpha}\right],\tag{1.9}$$

其中 $\gamma\in(0,1),\alpha\in(0,1),C_0>0,C_1>0$ 是常数.则存在 $\beta\in(0,\alpha]$, $C_2>0$,使得对于任意 $\rho\in(0,\rho_0)$ 有

$$\sum_{i=1}^{N}\omega_i(\rho)\leqslant C_2\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\beta}\left(\sum_{i=1}^{N}\omega_i(\rho_0)+1\right),\tag{1.10}$$

其中 β, C_2 仅依赖于 N,C_0,C_1,α,γ.

证明 对于 $0<\sigma<1$,写

$$\sum_{i=1}^{N}\omega_i(\rho)=\sum_{i\in A(\rho)}\omega_i(\rho)+\sigma\sum_{i\notin A(\rho)}\omega_i(\rho)$$
$$+(1-\sigma)\sum_{i\notin A(\rho)}\omega_i(\rho),$$

应用条件(1.9)与(1.10),我们得到

$$\sum_{i=1}^{N}\omega_i(\rho)\leqslant(\gamma+C_1\sigma)\sum_{i\in A(\rho)}\omega_i(2\rho)$$
$$+(1-\sigma)\sum_{i\notin A(\rho)}\omega_i(2\rho)+(C_0+\sigma C_1)\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\alpha}.$$

现在取 σ 使得 $\gamma+C_1\sigma=1-\sigma$,即 $\sigma=\dfrac{1-\gamma}{C_1+1}>0$,则有

$$\sum_{i=1}^{N}\omega_i(\rho)\leqslant(1-\sigma)\sum_{i=1}^{N}\omega_i(2\rho)+(C_0+\sigma C_1)\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\alpha}.$$

然后直接应用第六章引理 4.1,立即可得(1.10).

下面我们记

$$Q_R^* = Q_R \cap \{t < -R^2/2\}. \tag{1.11}$$

引理 1.3　设 $v \in W_{n+1}^{2,1}(Q_R) \cap C(\overline{Q}_R)$，在 Q_R 上满足 $Lv \leqslant 0$，且对于 $k < \sup\limits_{Q_R} v$ 与某一 $\beta \in (0,1)$ 有

$$\text{meas}\{(x,t) \in Q_R^* \mid v(x,t) < k\} \geqslant \beta |Q_R^*|,$$

则存在 $\gamma \in (0,1)$ 使得

$$\sup_{Q_{R/2}} v(x,t) \leqslant (1-\gamma)k + \gamma \sup_{Q_R} v,$$

其中 γ 仅依赖于 n,λ,Λ,β.

此引理是第六章引理 3.7 的推论.

基本引理 1.1 的证明　不妨设

$$L_l u_l \leqslant 0 \ (l = 1,2,\cdots,N), \tag{1.12}$$

否则可以用 $u_l - K_1 t$ 代替 u_l. 此外可设 $f_l(t) = t\ (l = 1,\cdots,N)$，否则只需在(1.6)中应用中值公式,适当改变 δ 与 K_2 即可.

记

$$\begin{aligned} &M_l(R) = \sup_{Q_R} u_l(x,t), \quad m_l(R) = \inf_{Q_R} u_l(x,t), \\ &\omega_l(R) = M_l(R) - m_l(R), \\ &\Gamma_l = Q_R^* \cap \left[u_l(x,t) \leqslant (1-\varepsilon)M_l\left(\frac{R}{2}\right) + \varepsilon\, m_l\left(\frac{R}{2}\right)\right], \end{aligned} \tag{1.13}$$

其中 ε 是待定的小正数. 又记指标集

$$\begin{aligned} A &= \left\{ l \,\middle|\, |\Gamma_l| \geqslant \frac{1}{N+1} |Q_R^*| \right\}, \\ B &= \left\{ l \,\middle|\, |\Gamma_l| < \frac{1}{N+1} |Q_R^*| \right\}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

我们将应用引理 1.2. 首先当 $l \in A$ 时,

$$|\Gamma_l| \geqslant \frac{1}{N+1} |Q_R^*|.$$

由引理 1.3 可得：$\forall\, l \in A$,

$$M_l\left(\frac{R}{2}\right) \leqslant (1-\gamma)\left[(1-\varepsilon)M_l\left(\frac{R}{2}\right) + \varepsilon m_l\left(\frac{R}{2}\right)\right] + \gamma M_l(R),$$

整理后得

$$\gamma M_l\left(\frac{R}{2}\right)+\varepsilon(1-\gamma)\omega_l\left(\frac{R}{2}\right)\leqslant\gamma M_l(R),\quad\forall\, l\in A.$$

注意到 $m_l(R/2)\geqslant m_l(R)$，则有

$$\omega_l\left(\frac{R}{2}\right)\leqslant\frac{\gamma}{\gamma+\varepsilon(1-\gamma)}\omega_l(R),\quad\forall\, l\in A.$$

因此引理 1.2 的条件(1.8)成立. 现在要证明条件(1.9)也成立. 由指标集 B 的定义，我们可以知道 $\bigcap_{l\in B}(Q_R^*\backslash\Gamma_l)$ 不是空集，则存在 $X_0\in\bigcap_{l\in B}(Q_R^*\backslash\Gamma_l)$，即

$$u_l(X_0)\geqslant(1-\varepsilon)M_l\left(\frac{R}{2}\right)+\varepsilon m_l\left(\frac{R}{2}\right),\quad l\in B.\tag{1.15}$$

固定 $s\in B$，取 $X_s\in\overline{Q}_{R/2}$ 使得 $u_s(X_s)=m_s\left(\frac{R}{2}\right)$，由条件(1.6)($f_l(t)=t$)，我们有

$$K_2\left[\frac{d(X_0,X_s)}{R_0}\right]^\alpha\geqslant\delta[u_s(X_0)-u_s(X_s)]_+ - \sum_{l=1}^N[u_l(X_0)-u_l(X_s)]_-.\tag{1.16}$$

现在分别估计不等式右端的两项. 首先，由(1.15)与 X_s 的定义，

$$\begin{aligned}u_s(X_0)-u_s(X_s)&\geqslant(1-\varepsilon)M_s\left(\frac{R}{2}\right)+\varepsilon m_s\left(\frac{R}{2}\right)-m_s\left(\frac{R}{2}\right)\\&=(1-\varepsilon)\omega_s\left(\frac{R}{2}\right).\end{aligned}\tag{1.17}$$

其次，当 $\forall\, h\in B$ 时，我们有

$$\begin{aligned}u_h(X_0)-u_h(X_s)&\geqslant(1-\varepsilon)M_h\left(\frac{R}{2}\right)+\varepsilon m_h\left(\frac{R}{2}\right)-M_h\left(\frac{R}{2}\right)\\&\geqslant-\varepsilon\omega_h\left(\frac{R}{2}\right);\end{aligned}\tag{1.18}$$

当 $\forall\, l\in A$ 时，显然有

$$u_l(X_0)-u_l(X_s)\geqslant-\omega_l(R).\tag{1.19}$$

将估计(1.17)，(1.18)，(1.19)代入(1.16)，则得

$$K_2\left(\frac{R}{R_0}\right)^\alpha\geqslant\delta(1-\varepsilon)\omega_s\left(\frac{R}{2}\right)-\varepsilon\sum_{l\in B}\omega_l\left(\frac{R}{2}\right)-\sum_{l\in A}\omega_l(R).$$

对 $s\in B$ 求和得到

$$NK_2\left(\frac{R}{R_0}\right)^\alpha \geqslant \delta(1-\varepsilon)\sum_{s\in B}\omega_s\left(\frac{R}{2}\right)-\varepsilon N\sum_{l\in B}\omega_l\left(\frac{R}{2}\right)-N\sum_{l\in A}\omega_l(R).$$

取 ε 充分小，使得 $\delta(1-\varepsilon)-\varepsilon N\geqslant\delta/2$，我们得到

$$\sum_{l\in B}\omega_l\left(\frac{R}{2}\right)\leqslant\frac{2N}{\delta}\sum_{l\in A}\omega_l(R)+\frac{2}{\delta}NK_2\left(\frac{R}{R_0}\right)^\alpha.$$

这正是条件(1.9)，应用引理 1.2 立即可得我们所要的结果.

§2　$C^{\alpha,\alpha/2}$ 模内估计

设 $Q_T=\Omega\times(0,T]$，$\Omega_t=Q_T\cap\{t\}$，$\Sigma_T=\partial\Omega\times(0,T]$，$\partial_pQ_T$ 表示 Q_T 的抛物边界，即 $\partial_pQ_T=\{\partial\Omega\times(0,T]\}\cup\Omega_0$. 又记

$$d_X=\mathrm{dist}\{X,\partial_pQ_T\},\quad d_{XY}=\min\{d_X,d_Y\}.\tag{2.1}$$

我们将考虑以下二阶完全非线性抛物型方程

$$u_t-F(x,t,u,Du,D^2u)=0.\tag{2.2}$$

$$u|_{\Omega_0}=\varphi(x),\quad u|_{\Sigma_t}=g(x,t).\tag{2.3}$$

假设 $F(x,t,z,p,r)$ 满足以下结构条件：

(F1) 存在 $\Lambda\geqslant\lambda>0$ 使得对于任意 $(x,t,z,p,r)\in\Gamma$，$\xi\in\boldsymbol{R}^n$ 都有

$$\lambda|\xi|^2\leqslant\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}\xi_i\xi_j\leqslant\Lambda|\xi|^2;$$

(F2) 对于任意 $(x,t,z)\in\Omega\times(0,T]\times\boldsymbol{R}$，有

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,t,z,0,0)\leqslant\mu_1,$$

$$|F(x,t,0,0,0)|\leqslant\mu_2.$$

关于 F 的光滑性我们将不仔细描述，例如可设 F 二次连续可微.

定理 2.1　设 $u\in C(\overline{Q}_T)\cap C^{2,1}(Q_T)$ 是方程(2.2) 在 Q_T 上的解，且 $[u]_{0,\partial_pQ_T}<\infty$，又设 F 满足结构条件 (F1)，(F2)，则

$$[u]_{0,Q_T}\leqslant e^{\mu_1T}\{\mu_2T+[u]_{0,\partial_pQ_T}\}\xlongequal{\text{def}}K_0.$$

证明　我们可把方程(2.2)写成如下形式：

$$u_t-a^{ij}D_{ij}u+b^iD_iu+cu=F(x,t,0,0,0),$$

其中

$$a^{ij}(x,t) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x,t,u,Du,\tau D^2u)\mathrm{d}\tau,$$

$$b^i(x,t) = -\int_0^1 \frac{\partial F}{\partial p_i}(x,t,u,\tau Du,0)\mathrm{d}\tau,$$

$$c(x,t) = -\int_0^1 \frac{\partial F}{\partial z}(x,t,\tau u,0,0)\mathrm{d}\tau.$$

由极值原理不难得到所要的结果. 证毕.

为了得到解及其一、二阶导数的 Hölder 模估计,并使其适用于具有自然结构条件的方程,我们给出下面的引理:

引理 2.2 设 $u_l \in W^{2,1}_{n+1}(Q_{R_0})$ $(l=1,2,\cdots,N)$, $g^i(i=1,2,\cdots,n)$ 是定义于 Q_{R_0} 上的函数,它们满足

$$|Lu_l - g^iD_iu_l| \leqslant K\Big(1+\sum_{h=1}^N |Du_h|^2\Big)^{\alpha} \quad (0<\alpha<1), \tag{2.4}$$

$$\sum_{i=1}^n |g^i|^2 \leqslant K\Big(1+\sum_{l=1}^N |Du_l|^2\Big), \tag{2.5}$$

其中 $Lu = u_t - a^{ij}D_{ij}u$ 是满足(1.3),(1.4)的抛物型算子,则存在 $\beta \in (0,1)$, $C>0$ 使得

$$\sum_{l=1}^N \operatorname*{osc}_{Q_R} u_l \leqslant C\Big(\frac{R}{R_0}\Big)^{\beta}\Big(\sum_{l=1}^N \operatorname*{osc}_{Q_{R_0}} u_l + 1\Big), \quad \forall\, 0<R<R_0, \tag{2.6}$$

其中 β, C 仅依赖于 $n,N,\lambda,\Lambda,\alpha,K$ 与 $\max\limits_{1\leqslant l\leqslant N}[u_l]_0$, 这里与下面都用了求和约定.

证明 令

$$v = \exp\Big\{\gamma\sum_l (u_l-q_l)^2\Big\},$$

其中 γ 是待定常数, q_l 是参数. 容易计算

$$\begin{aligned} Lv = {} & 2\gamma v(u_l-q_l)Lu_l - 2\gamma v a^{ij}D_iu_lD_ju_l \\ & - 4\gamma^2 v a^{ij}(u_l-q_l)D_iu_l(u_s-q_s)D_ju_s. \end{aligned}$$

由条件(1.3),(1.4),则

$$Lv \leqslant v\Big[-2\lambda\gamma\sum_{l,i}(D_iu_l)^2 - 4\gamma^2\lambda\sum_i[(u_l-q_l)D_iu_l]^2$$

$$+2\gamma|u_l-q_l|\Big[|g^iD_iu_l|+K\Big(1+\sum_{l,i}|D_iu_l|^2\Big)^{\alpha}\Big]\Big].$$

应用 Cauchy 不等式并注意条件(2.5)可得

$$Lv \leqslant v\Big[-2\lambda\gamma\sum_l|Du_l|^2 - 4\gamma^2\lambda\sum_i[(u_l-q_l)D_iu_l]^2$$

$$+\gamma^2\lambda\sum_i[(u_l-q_l)D_iu_l]^2+\frac{1}{\lambda}\sum|g^i|^2$$

$$+\varepsilon\Lambda\sum_l|Du_l|^2+C_\varepsilon\gamma\Big],$$

其中 C_ε 还依赖于 n,N,K,α,q_l 与 $\max\limits_l[u_l]_0$. 现在取 $\gamma=K/\lambda^2$, $\varepsilon=\lambda$, 则有

$$Lv \leqslant Cv, \tag{2.7}$$

这里 C 依赖于 $n,N,\lambda,\Lambda,K,\alpha$ 与 $\max\limits_l[u_l]_0$.

我们不妨设 $N\geqslant 2$, 且在 Q_{R_0} 上

$$\sum_{l=1}^{N}u_l(x,t)=0, \tag{2.8}$$

否则我们可以用 $\{u_l\}_{l=1}^{2N}$ 代替 $\{u_l\}_{l=1}^{N}$, 而取

$$u_{N+k}=-u_k \quad (k=1,2,\cdots,N).$$

现在定义

$$v_s=\exp\Big\{\gamma\sum_l(u_l-q_{ls})^2\Big\},\quad s=1,2,\cdots,N, \tag{2.9}$$

其中

$$q_{ls}=\begin{cases}-[u_l]_0-\dfrac{1}{2}, & l\neq s,\\[2mm] -[u_l]_0-\dfrac{m}{2}, & l=s,\end{cases}$$

m 为待定常数. 现在我们于基本引理 1.1 中取 $f_s(t)=\log t$, 容易计算

$$I\overset{\text{def}}{=\!=}\delta\sum_s[\log v_s(X)-\log v_s(Y)]_+-\sum_s[\log v_s(X)-\log v_s(Y)]_-$$

$$\leqslant\gamma\delta\sum_s\{(m+C)[u_s(X)-u_s(Y)]_++C\sum_{l\neq s}[u_l(X)-u_l(Y)]_+$$

$$-\gamma\sum_s m[u_s(X)-u_s(Y)]_--C\gamma\sum_{l\neq s}|u_l(X)-u_l(Y)]|.$$

整理后得

$$I \leqslant \gamma[(m+C)\delta+\delta CN+CN]\sum_{l=1}^{N}[u_l(X)-u_l(Y)]_+$$

$$-\gamma(m-CN)\sum_{l=1}^{N}[u_l(X)-u_l(Y)]_-.$$

首先取 m 充分大,然后取 δ 充分小使得

$$\begin{aligned}&m\geqslant 3CN,\quad m>2N(4\max_l[u_l]_0+1),\\&(m+C)\delta+\delta CN\leqslant CN,\end{aligned}\tag{2.10}$$

则有

$$\begin{aligned}I&\leqslant 2\gamma CN\sum_{l=1}^{N}([u_l(X)-u_l(Y)]_+-[u_l(X)-u_l(Y)]_-)\\&\leqslant 2\gamma CN\sum_{l=1}^{N}(u_l(X)-u_l(Y)).\end{aligned}$$

注意到(2.8),我们有

$$I\leqslant 0.$$

此式与估计(2.7)说明基本引理 1.1 的条件(1.5),(1.6)都满足,于是存在 $\beta\in(0,1)$,$C>0$,使得

$$\sum_{s=1}^{N}\operatorname*{osc}_{Q_R}v_s\leqslant C\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\beta}\left(\sum_{s=1}^{N}\operatorname*{osc}_{Q_{R_0}}u_s+1\right),\quad\forall R\in(0,R_0),$$

于是对于 $s=1,2,\cdots,N$,有

$$\operatorname*{osc}_{Q_R}(\log v_s)\leqslant C\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\beta}\left(\sum_{s=1}^{N}\operatorname*{osc}_{Q_{R_0}}u_s+1\right),\quad\forall R\in(0,R_0),$$

由此我们有

$$\operatorname*{osc}_{Q_R}(u_s-q_{ss})^2-\sum_{l\neq s}\operatorname*{osc}_{Q_R}(u_l-q_{ls})^2\leqslant C\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\beta}\left(\sum_{s=1}^{N}\operatorname*{osc}_{Q_{R_0}}u_s+1\right),$$

注意到 q_{ls} 的定义(2.9),对于任意 $R\in(0,R_0)$,

$$\begin{aligned}&m\operatorname*{osc}_{Q_R}(u_s-q_{ss})-(4\max[u_l]_0+1)\sum_{l=1}^{N}\operatorname*{osc}_{Q_R}u_l\\&\qquad\leqslant C\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\beta}\left(\sum_{s=1}^{N}\operatorname*{osc}_{Q_{R_0}}u_s+1\right),\end{aligned}$$

对 s 求和后得到对于任意 $R\in(0,R_0)$,有

$$[m - N(4\max_l [u_l]_0 + 1)]\sum_{l=1}^{N} \operatorname*{osc}_{Q_R} u_l \leqslant C\left(\frac{R}{R_0}\right)^\beta \left(\sum_{s=1}^{N} \operatorname*{osc}_{Q_{R_0}} u_s + 1\right),$$

由 m 的取法(2.10)，则对于任意 $R \in (0,R_0)$，有

$$\frac{m}{2}\sum_{l=1}^{N} \operatorname*{osc}_{Q_R} u_l \leqslant C\left(\frac{R}{R_0}\right)^\beta \left(\sum_{s=1}^{N} \operatorname*{osc}_{Q_{R_0}} u_s + 1\right).$$

引理证毕.

现在我们进一步要求 $F(x,t,z,p,r)$ 满足以下结构条件：

(F3) 对于 $(x,t,z,p) \in \Omega \times (0,T] \times [-K_0,K_0] \times \boldsymbol{R}^n$，

$$|F(x,t,z,p,0)| \leqslant \mu_3(1 + |p|^2).$$

定理 2.3　设 u 是方程(2.2)在 Q_T 的解，且 $[u]_{0,Q_T} \leqslant K_0$；又设 F 满足结构条件(F1)、(F3)，则存在 $\beta \in (0,1)$，$C_\beta > 0$ 使得如果 $Q_{R_0}(X_0) \subset Q_T$，必有

$$\operatorname*{osc}_{Q_R(X_0)} u \leqslant C_\beta\left(\frac{R}{R_0}\right)^\beta \operatorname*{osc}_{Q_{R_0}} u,$$

其中 β, C_β 仅依赖于 $n,\lambda,\Lambda,\mu_3,K_0$.

证明　方程(2.2)可写成

$$u_t - a^{ij}D_{ij}u - F(x,t,u,Du,0) = 0,$$

其中

$$a^{ij}(x,t) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x,t,u,Du,\tau D^2u)\mathrm{d}\tau.$$

我们令

$$g^i = \frac{F(x,t,u,Du,0)}{1 + |Du|^2}D_i u,$$

则方程(2.2)可写成

$$u_t - a^{ij}D_{ij}u - g^iD_iu = \frac{F(x,t,u,Du,0)}{(1 + |Du|^2)},$$

其中 g^i 满足

$$\sum_{i=1}^{n}(g^i)^2 \leqslant \mu_3^2|Du|^2.$$

由引理 2.2 存在 $\beta \in (0,1)$，$C > 0$，使得

$$\operatorname*{osc}_{Q_R(X_0)} u \leqslant C\left(\frac{R}{R_0}\right)^\beta \left(\operatorname*{osc}_{Q_{R_0}} u + 1\right),\quad \forall\, R \in (0,R_0).$$

这就是我们所要的.

§3 $C^{\alpha,\alpha/2}$ 模的全局估计

在前一节我们已建立了 $C^{\alpha,\alpha/2}$ 模的内估计,这里要建立边界附近的估计,主要是应用闸函数方法.

为了将来扩充变量的方便,我们不用圆柱体,而代之以正方柱体.记

$$Q_{R,h}=\left\{\begin{array}{c}(x,t)\,|\,|x_i|<R,i=1,2,\cdots,n-1,\\ 0<x_n<2R,\quad 0<t<h,\end{array}\right\} \tag{3.1}$$

$$Q_{R,0}=\overline{Q}_{R,h}\cap\{t=0\},\quad \Sigma_{R,h}=\overline{Q}_{R,h}\cap\{x_n=0\}.$$

仍然记满足(1.3)的抛物型算子

$$Lu=\frac{\partial}{\partial t}u-a^{ij}D_{ij}u. \tag{3.2}$$

引理 3.1 设 $u\in C(\overline{Q}_{R,h})\cap C^2(Q_{R,h})(R,h\leqslant 1)$ 且在 $Q_{R,h}$ 上满足

$$Lu\leqslant\mu(1+|Du|^2),\quad u\leqslant 1, \tag{3.3}$$

则存在 $C\geqslant 1$ 使得

(1) 如果在 $\Sigma_{R,h}\cup Q_{R,0}$ 上 $u\leqslant 0$, 则

$$u(0,x_n,h)\leqslant\frac{Cx_n}{R},\quad 0\leqslant x_n\leqslant R; \tag{3.4}$$

(2) 如果仅在 $\Sigma_{R,h}$ 上 $u\leqslant 0$, 则

$$u(0,x_n,h)\leqslant\frac{Cx_n}{\min\{R,h^{1/2}\}},\quad 0\leqslant x_n\leqslant\min\{R,h^{1/2}\}; \tag{3.5}$$

(3) 如果仅在 $Q_{R,0}$ 上 $u\leqslant 0$, 则

$$u(0,R,t)\leqslant C\frac{t}{R^2},\quad 0<t<h, \tag{3.6}$$

其中 C 仅依赖于 n,λ,Λ,μ.

证明 (1) 记 $x^0=(0,\cdots,0,-R^2)$, $d=|x-x^0|-R$, 在 $Q_{R,h}$ 上考虑闸函数

$$Z(x,t)=\psi(d)=\frac{1}{\nu}\log\left(1+K\left(\frac{d}{R}\right)\right), \tag{3.7}$$

其中 ν,K 为待定常数. 容易验证 $\psi''=-\nu\psi'^2$. 方程(3.3)可写成

$$Lu = g(1 + |Du|^2), \quad g \leqslant \mu.$$

然后记

$$\mathscr{L}u = Lu - g|Du|^2. \tag{3.8}$$

计算之后可得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}Z = &- a^{ij}\psi'' \frac{(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}{|x - x^0|^2} \\ &- a^{ij}\psi' \frac{\delta_{ij}|x - x^0|^2 - (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)}{|x - x^0|^3} - g(\psi')^2 \\ \geqslant &- \lambda\psi'' - \frac{\Lambda(n-1)}{R}\psi' - \mu(\psi')^2.\end{aligned}$$

我们将使 ψ 满足

$$\psi' \geqslant \max\left\{\frac{\Lambda(n-1)}{\mu R}, 1\right\}, \quad \lambda\nu \geqslant 4\mu, \tag{3.9}$$

则有

$$\mathscr{L}Z \geqslant - \lambda\psi'' - 2\mu(\psi')^2 \geqslant 2\mu \geqslant \mathscr{L}u. \tag{3.10}$$

考虑区域

$$N_\delta = \{0 < d < \delta R\} \times (0,h] \cap Q_{R,h},$$

其中 δ 是待定的小于 1 的正常数. 在 $\partial_p N_\delta \cap \{\Sigma_{R,h} \cup Q_{R,0}\}$ 上

$$Z(x,t) \geqslant 0 \geqslant u(x,t).$$

如果取 δ 使得

$$\psi(\delta R) \geqslant 1, \tag{3.11}$$

则在 $\partial_p N_\delta \cap Q_{R,h}$ 上

$$Z(x,t) = \psi(\delta R) \geqslant 1 \geqslant u(x,t).$$

由极值原理,则有

$$u(x,t) \leqslant Z(x,t), \quad \forall\ (x,t) \in N_\delta.$$

特别地,当 $0 < x_n \leqslant \delta R$ 时,

$$\begin{aligned}u(0,x_n,h) \leqslant Z(0,x_n,h) &= \nu^{-1}\log\left(1 + \frac{Kx_n}{R}\right) \\ &\leqslant \frac{Kx_n}{\nu R}.\end{aligned}$$

现在罗列前面关于 ψ 的要求(3.9)与(3.11),即在 N_δ 上

$$\begin{cases}\psi' \geqslant \max\left\{\dfrac{\Lambda(n-1)}{\mu R},1\right\},\\ \lambda\nu \geqslant 4\mu,\\ \psi(\delta R) \geqslant 1.\end{cases} \tag{3.12}$$

注意到当 $K\delta \geqslant 1$ 时，$\psi'(d) \geqslant \psi'(\delta R) \geqslant (2\nu\delta R)^{-1}$，我们只需取

$$\nu = \max\left\{\frac{4\mu}{\lambda},1\right\},$$

$$K\delta = e^{\nu} - 1,$$

$$\delta = \left[2\nu \max\left\{\frac{\Lambda(n-1)}{\mu},1\right\}\right]^{-1}.$$

当 $\delta R \leqslant x_n \leqslant R$ 时，结论是平凡的，因为由(3.3)

$$u(0,x_n,h) \leqslant 1 \leqslant \frac{x_n}{\delta R}$$

(2) 类似地取闸函数

$$Z_1(x,t) = \psi\left(d + \frac{\delta(h-t)R}{h}\right),$$

函数 ψ 定义于(3.7). 类似的计算要求 ψ 满足

$$\begin{cases}\psi' \geqslant \max\left\{\dfrac{\Lambda(n-1)}{2\mu R},\dfrac{\delta R}{2\mu h},1\right\},\\ \lambda\mu \geqslant 4\mu,\\ \psi(\delta R) \geqslant 1.\end{cases} \tag{3.13}$$

这只需取

$$\begin{aligned}&\nu = \max\left\{\frac{4\mu}{\lambda},1\right\},\\ &K\delta = e^{\nu} - 1,\\ &\delta = \left[4\nu \max\left\{\frac{\Lambda(n-1)}{\mu},\frac{\delta R^2}{2\mu h}\right\}\right]^{-1}.\end{aligned} \tag{3.14}$$

为使最后一式满足，可取

$$\delta \leqslant \min\left\{\frac{2\mu}{4\nu\Lambda(n-1)},\frac{\sqrt{2\mu h}}{\sqrt{4\nu R}}\right\}. \tag{3.15}$$

对于这样选取的参数，当 $0 < x_n \leqslant \delta\min\{R,\sqrt{h}\} \leqslant \delta R$ 时，

$$u(0,x_n,h) \leqslant Z_1(0,x_n,h) = \frac{1}{\nu}\log\left(1 + \frac{Kx_n}{R}\right)$$

$$\leqslant \frac{K\delta x_n}{\nu\delta R} = \frac{C}{\min\{R,\sqrt{h}\}} x_n.$$

类似地，当 $\delta\min\{R,\sqrt{h}\} \leqslant x_n \leqslant \min\{R,\sqrt{h}\}$ 时情况是平凡的.

(3) 取闸函数

$$Z_2(x,t) = \frac{1}{R^2}[(x_n - R)^2 + |x'|^2 + Ct], \tag{3.16}$$

其中 $x' = (x_1,\cdots,x_{n-1})$，计算后得

$$\mathscr{L}Z_2 = \frac{1}{R^2}\left[C - 2a_n - \frac{g}{R^2}(4|x'|^2 - 8x_nR + 4R^2)\right]. \tag{3.17}$$

取 C 充分大可使

$$\mathscr{L}Z_2 \geqslant \mathscr{L}u.$$

容易验算在 $Q_{R,h}$ 的抛物边界上 $Z_2(x,t) \geqslant u(x,t)$，由极值原理，在 $Q_{R,h}$ 上

$$Z_2(x,t) \geqslant u(x,t).$$

特别地，取 $x_n = R, x' = 0$，则有所要的估计.

引理 3.2 设 $u \in C(\overline{Q}_{2,T}) \cap C^2(Q_{2,T})$，对于某一 $\alpha \in (0,1)$，

$$|u|_{0,Q_{2,T}} \leqslant K_0 < \infty, \quad [u]_{\alpha,\Sigma_{2,T}\cup Q_{2,0}} \leqslant K_\alpha < \infty, \tag{3.18}$$

且满足

$$Lu \leqslant \mu(1 + |Du|^2), \quad (x,t) \in Q_{2,T}, \tag{3.19}$$

则

(1) 在 $Q_{1,T}$ 上

$$u(x,t) - u(x',0,t) \leqslant Cx_n^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(1 + K_\alpha); \tag{3.20}$$

(2) 在 $Q_{1,T}$ 上

$$u(x,t) - u(x,0) \leqslant Ct^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}\left\{\max\left\{1, \frac{t^{\frac{2-\alpha}{2+\alpha}}}{x_n^2}\right\} + K_\alpha\right\}, \tag{3.21}$$

其中 C 仅依赖于 $n,\lambda,\Lambda,\mu,T,\alpha,K_0$.

证明 (1) 设 $X_0 = (x^0,t^0) \in Q_{2,T}$，取 $R \leqslant 1$, $h = \min\{R^2,t^0\}$. 对于 $X_1 = (x'^0,0,t^0 - h)$，在长方柱体 $X_1 + Q_{R,h}$ 上考虑辅助函数

$$W(x,t) = \frac{1}{2K_0}[u(x,t) - u(X_1) - (2nR^2 + h)^{\alpha/2}K_\alpha]. \tag{3.22}$$

容易验证在 $X_1 + Q_{R,h}$ 上(不妨设 $K_0 \geqslant 1$)

$$LW \leqslant 2\mu K_0[1 + |DW|^2].$$

然后以 $2\mu K_0$ 代替引理 3.1 的 μ，确定相应的 δ. 下面分两种情况：

情况 1　$t^0 > R^2$. 此时我们只有

$$W(x,t)|_{X_1+\Sigma_{R,h}} \leqslant 0.$$

由引理 3.1 的结论(2)我们有

$$W(x'^0,x_n,t^0) \leqslant C\frac{x_n}{\min\{\sqrt{h},R\}} \leqslant C\frac{x_n}{R},\quad 0 < x_n < R.$$

情况 2　$t^0 \leqslant R^2$. 此时有

$$W(x,t)_{X_1+(\Sigma_{R,h}\cup Q_{R,h})} \leqslant 0.$$

同样由引理 3.1 的结论(1),我们有

$$W(x'^0,x_n,t^0) \leqslant C\frac{x_n}{R},\quad 0 < x_n < R.$$

这样对于上述两种情况,我们都有

$$u(x'^0,x_n,t^0) - u(x'^0,0,t^0) \leqslant C\left(\frac{x_n}{R} + R^\alpha K_\alpha\right).$$

上述不等式对于任意 $0 < R \leqslant 1$ 都成立,特别地对于 $0 < x_n \leqslant 1/4$ 取 $R = (x_n)^{1/(\alpha+1)}$, 则有

$$u(x',x_n,t) - u(x',0,t) \leqslant Cx_n^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}\{1 + K_\alpha\},\quad 0 < x_n \leqslant 1/4.$$

(2) 对于 $X_1 = (x'^0,x_n^0 - R,0) \in Q_{1,0}$, $R \leqslant \frac{1}{2}x_n^0$, $h \leqslant 1$, 则有

$$X_1 + Q_{R,h} \subset Q_{2,T}.$$

令

$$w(x,t) = \frac{1}{2K_0}[u(x,t) - u(x^0,0) - (2\sqrt{n}R)^\alpha K_\alpha],$$

应用引理 3.1 的结论(3),则有

$$w(x^0,t) \leqslant C\frac{t}{R^2}.$$

于是

$$u(x^0,t) - u(x^0,0) \leqslant C\left(\frac{t}{R^2} + R^\alpha K_\alpha\right).$$

如果 $t \leqslant \left(\frac{1}{2}x_n^0\right)^{2+\alpha}$，取 $R = t^{1/(2+\alpha)}$，则

$$u(x^0,t) - u(x^0,0) \leqslant Ct^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}(1+K_\alpha);$$

如果 $t \geqslant \left(\frac{1}{2}x_n^0\right)^{2+\alpha}$，则

$$u(x^0,t) - u(x^0,0) \leqslant 2K_0 \leqslant \frac{2K_0}{(\frac{1}{2}x_n^0)^2}t^{\frac{2}{2+\alpha}}$$

$$\leqslant 8K_0 t^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}\left(\frac{t^{\frac{2-\alpha}{2+\alpha}}}{(x_n^0)^2}\right).$$

综合上面两个结果，结论(2)得证.

现在在 $Q_{2,l}$ 上考虑完全非线性抛物型方程(2.2).

定理 3.3　设 $u \in C(\bar{Q}_{2,T}) \cap C^{2,1}(Q_{2,T})$ 是方程(2.2)的解且

$$[u]_{0,Q_{2,l}} \leqslant K_0, \quad [u]_{\alpha,\Sigma_{2,l}\cup Q_{2,0}} \leqslant K_\alpha \quad (0<\alpha<1),$$

$F(x,t,z,p,r)$ 满足结构条件(F1),(F3)，则存在 $\beta \in (0,\alpha]$，$C>0$ 使得

$$[u]_{\beta,Q_{1,l}} \leqslant C(1+K_\alpha), \tag{3.23}$$

其中 C,β 仅依赖于 $n,\lambda,\Lambda,\mu_3,\alpha,T$ 与 K_0.

证明　对于任意 $X(x,t),Y(y,\tau) \in Q_{1,l}$，由内估计，存在 $\beta_0 \in (0,1)$，$C>0$ 使得

$$\begin{aligned}|u(x,t)-u(y,\tau)| &\leqslant C\left(\frac{d(X,Y)}{d_{XY}}\right)^{\beta_0} \\ &\leqslant \frac{C}{\min\{x_n,y_n,\sqrt{t},\sqrt{\tau}\}^{\beta_0}}(d(X,Y))^{\beta_0},\end{aligned} \tag{3.24}$$

其中 $d(X,Y)$ 表示抛物距离，$d_X = \operatorname{dist}\{X,\partial_p Q_{2,l}\}$. 不妨设 $d(X,Y) \leqslant 1/2$. 下面分两种情况：

情况 1　$\max\{x_n,y_n\} \leqslant 2(d(X,Y))^{\frac{2-\alpha}{2(2+\alpha)}}$. 由于方程(2.2)可写成

$$Lu = u_t - a^{ij}D_{ij}u = F(x,t,u,Du,0), \tag{3.25}$$

其中

$$a^{ij} = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x,t,u,Du,\tau D^2u)\mathrm{d}\tau,$$

于是

$$L(\pm u) \leqslant \mu_3(1 + |Du|^2).$$

则由引理 3.2 可得

$$|u(x,t) - u(x',0,t)| \leqslant C x_n^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(1 + K_\alpha),$$

$$|u(y,\tau) - u(y',0,\tau)| \leqslant C y_n^{\frac{\alpha}{(1+\alpha)}}(1 + K_\alpha),$$

于是

$$\begin{aligned}
&|u(x,t) - u(y,\tau)| \\
&\quad \leqslant |u(x,t) - u(x',0,t)| \\
&\qquad + |u(y,\tau) - u(y',0,\tau)| \\
&\qquad + |u(x',0,t) - u(y',0,\tau)| \\
&\quad \leqslant 4C(d(X,Y))^{\frac{\alpha(2-\alpha)}{2(2+\alpha)(1+\alpha)}}(1 + K_\alpha) + K_\alpha d(X,Y)^\alpha \\
&\quad \leqslant C(1 + K_\alpha)(d(X,Y))^{\frac{\alpha(2-\alpha)}{2(2+\alpha)(1+\alpha)}}.
\end{aligned}$$

情况 2 $\min\{x_n, y_n\} \geqslant (d(X,Y))^{\frac{2-\alpha}{2(2+\alpha)}}$. 此时又分两种情况：

(a) $\min\{t,\tau\} \geqslant d(X,Y)$，则由内估计(3.24)有

$$|u(x,t) - u(y,\tau)| \leqslant C(d(X,Y))^{\beta_0/2}; \tag{3.26}$$

(b) $\max\{t,\tau\} \leqslant 2d(X,Y)$，由引理 3.2 结论(2)

$$\begin{aligned}
|u(x,t) - u(x,0)| &\leqslant C t^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}\left\{\max\left\{1, \frac{t^{\frac{2-\alpha}{2+\alpha}}}{x_n^2}\right\} + K_\alpha\right\} \\
&\leqslant C[d(X,Y)]^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}(1 + K_\alpha).
\end{aligned}$$

同理可估计 $|u(y,\tau) - u(y,0)|$，这样我们有

$$\begin{aligned}
&|u(x,t) - u(y,\tau)| \\
&\quad \leqslant |u(x,t) - u(x',0,t)| \\
&\qquad + |u(y,\tau) - u(y',0,\tau)| \\
&\qquad + |u(x',0,t) - u(y',0,\tau)| \\
&\quad \leqslant 4C(d(X,Y))^{\frac{\alpha}{(2+\alpha)(1+\alpha)}}(1 + K_\alpha) + K_\alpha d(X,Y)^\alpha.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

以上包括了可能发生的情况. 例如同时满足

$$\max\{x_n, y_n\} \geqslant 2(d(X,Y))^{\frac{(2-\alpha)}{2(2+\alpha)}} \text{ 与 } \min\{x_n, y_n\} \leqslant (d(X,Y))^{\frac{(2-\alpha)}{2(2+\alpha)}}$$

是不可能发生的. 综合上述结果定理得证.

定理 3.4　设 u 是方程(2.2)在 $Q_T = \Omega \times (0,T]$ 上的解,且 $u \in C(\overline{Q}_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$,

$$[u]_{0,Q_T} \leqslant K_0, \quad [u]_{\alpha,\partial_p Q_T} \leqslant K_\alpha \quad (0 < \alpha < 1);$$

又设 $F(x,t,z,p,r)$ 满足结构条件(F1),(F3), $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, 则存在 $0 < \beta \leqslant \alpha$, $C > 0$ 使得

$$[u]_{\beta,Q_T} \leqslant C\{1 + K_\alpha\},$$

其中 C,β 仅依赖于 $n,\lambda,\Lambda,\mu_3,\alpha,T$ 与 K_0.

定理的证明与通常的方法一样,对于边界局部展平,然后应用定理3.3.

§4　一阶微商的估计

首先我们注意到事实上在上节已蕴含了解的微商 $D_x u$ 的边界估计.

定理 4.1　设 $u \in C(\overline{Q}_{2,T}) \cap C^{2,1}(Q_{2,T})$ 是方程(2.2)在 $Q_{2,T}$ 上的解, $[u]_{0,Q_{2,T}} \leqslant K_0$ 且

$$u|_{\Sigma_{2,T}} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x). \tag{4.1}$$

又设 $F(x,t,z,p,r)$ 满足结构条件(F1),(F3),则

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{\Sigma_{1,T}} \leqslant C, \tag{4.2}$$

其中 $C \geqslant 1$ 仅依赖于 $n,\lambda,\Lambda,\mu_1,K_0,|\varphi|_1$.

证明　由于 u 满足(3.25),与引理 3.1 结论(1)的证明完全类似(仅有微小的差别)可得

$$\pm u(x,t) \leqslant Cx_n, \quad (x,t) \in K_{1,T},$$

由此立即可得(4.2). 证毕.

为了得到 $D_x u$ 的全局估计我们需要进一步假定 F 满足结构条件:

(F4) 对于任意 $(x,t,z,p,r) \in \Omega \times (0,T] \times [-K_0,K_0] \times \boldsymbol{R}^n \times \mathscr{S}^n$,有

$$(1 + |p|)|F_p| + |F_z| + (1 + |p|)^{-1}|F_x| + |F| + |F_t|$$

$$\leqslant \mu_4(1+|p|^2+|r|).$$

附注 如果仅仅为了得到 $[D_x u]_0$ 的估计，事实上不必要求 F_t 满足上述条件.

在本节，我们将以 Q_R 表示圆柱体 $\{(x,t)\,|\,|x|<R, -R^2<t\leqslant 0\}$.

定理 4.2 设 $u\in C(\overline{Q}_T)\cap C^{2,1}(Q_T)$ 是方程(2.2)在 Q_T 上的解，$[u]_{0,Q_T}\leqslant K_0$，$[u]_{\alpha,Q_T}\leqslant K_\alpha(0<\alpha<1)$，$D_x u\in C(\overline{Q}_T)\cap C^{2,1}(Q_T)$，又设 F 满足结构条件(F1)，(F4)，则

$$[D_x u]_{0,Q_T}\leqslant K_1, \tag{4.3}$$

其中 K_1 仅依赖于 $n,\lambda,\Lambda,\mu_4,K_0,K_\alpha,\alpha,T,\mathrm{diam}\Omega$.

证明 我们将用改进的 Bernstein 估计方法.

记 $M=\sup\limits_{Q_T}|D_x u|$，必存在点 $X_0\in\overline{Q}_T$ 使得 $|D_x u(X_0)|=M$，不妨设 $M\geqslant 1$. 如果 X_0 在抛物边界 $\partial_p Q_T$ 上，由定理 4.1，立即可得 $|D_x u|$ 的先验估计. 现在设 $X_0\in Q_T$. 考虑 X_0 的邻域 $Q_R(X_0)=X_0+Q_R$，其中 $R=1/M$. 取 $Q_R(X_0)$ 的截断函数 $\eta(x,t)$，即 $\eta(x,t)$ 在 $Q_R(X_0)$ 的抛物边界附近为 0，此外它还满足(注意到 $R=1/M$)

$$\begin{gathered}\eta(X_0)=1,\quad 0\leqslant\eta(x,t)\leqslant 1,\\ |D_x\eta|\leqslant CM,\quad |D_t\eta|\leqslant CM^2,\quad |D_x^2\eta|\leqslant CM^2,\end{gathered} \tag{4.4}$$

其中 C 只依赖于 n. 现在在 $Q_T\cap Q_R(X_0)$ 上考虑辅助函数

$$w(x,t)=\eta^2|Du|^2+NM^2(u(x,t)-u(X_0))^2, \tag{4.5}$$

其中 N 是待定正常数. 设 $w(x,t)$ 在某点 $X_1\in\overline{Q}_T\cap\overline{Q}_R(X_0)$ 上达到最大值.

如果 $X_1\in\partial_p(Q_T)\cap Q_R(X_0)$，则

$$\begin{aligned}M^2&=w(X_0)\leqslant w(X_1)\\ &\leqslant|Du(X_1)|+NM^2(u(X_1)-u(X_0))^2.\end{aligned} \tag{4.6}$$

注意到假定 $[u]_{\alpha,Q_T}\leqslant K_\alpha$，由上式可得

$$M^2\leqslant\sup_{\partial_p Q_T}|Du|^2+NK_\alpha^2M^{2-2\alpha},$$

由此立即得到

$$M^2\leqslant C\big(\sup_{\partial_p Q_T}|Du|^2+N^{1/(2\alpha)}\big). \tag{4.7}$$

如果 $X_1 \in Q_T \cap \partial_p Q_R(X_0)$，则

$$M^2 \leqslant NK_\alpha M^{2-2\alpha},$$

于是在这种情况下也有

$$M \leqslant (NK_\alpha)^{1/(2\alpha)}.$$

现在设 $X_1 \in Q_T \cap Q_R(X_0)$，考虑抛物型算子

$$Lw = w_t - \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} D_{ij} w - \frac{\partial F}{\partial p_i} D_i w, \tag{4.8}$$

且注意运算公式

$$L(uv) = uLv + vLu - 2\frac{\partial F}{\partial r_{ij}} D_i u D_j v,$$

则在 X_1 点上

$$\begin{aligned}0 \leqslant Lw = {} & |Du|^2 L(\eta^2) + \eta^2 L(|Du|^2) - 2\frac{\partial F}{\partial r_{ij}} D_i(\eta^2) D_j(|Du|^2) \\ & + 2N(u(X_1) - u(X_0))M^2 Lu - 2NM^2 \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} D_i u D_j u.\end{aligned} \tag{4.9}$$

容易计算

$$L(|Du|^2) = 2D_k u L(D_k u) - 2\frac{\partial F}{\partial r_{ij}} D_{ik} u D_{jk} u.$$

注意到(4.4)与结构条件(F1)，则在 X_1 点上

$$\begin{aligned}0 \leqslant Lw \leqslant & - 2\lambda NM^2 |Du|^2 - 2\lambda\eta^2 |D^2 u|^2 + C|Du|^2 |L(\eta^2)| \\ & + C\sum_k |Du||L(D_k u)| + CM^2 |D^2 u| + CNK_\alpha M^{2-\alpha} |Lu|,\end{aligned}$$

其中 C 只依赖于 $n, \lambda, \Lambda, \mu_4$. 应用结构条件(F4)与(4.4)我们有

$$|Du|^2 |L\eta^2| \leqslant C(M^4 + M^2 |D^2 u|),$$

$$\begin{aligned}\sum_k |Du||L(D_k u)| & \leqslant \sum_k |Du||F_z D_k u + F_{x_k}| \\ & \leqslant C(M^4 + M^2 |D^2 u|),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|Lu| & = \left| u_t - \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} D_{ij} u - \frac{\partial F}{\partial p_i} D_i u \right| \\ & = \left| F - \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} D_{ij} u - \frac{\partial F}{\partial p_i} D_i u \right| \leqslant C(M^2 + |D^2 u|).\end{aligned}$$

将以上各项代入(4.9)，则在 X_1 点上有

$$0 \leqslant - 2N\lambda M^2 |Du| - 2\lambda\eta^2 |D^2 u|^2$$

$$+ C(M^1 + M^2|D^2u|) + CNM^{2-\alpha}(M^2 + |D^2u|).$$

应用 Cauchy 不等式可得在 X_1 上

$$0 \leqslant -2\lambda NM^2|Du|^2 + \frac{CM^4}{\eta^2} + CNM^{4-\alpha} + \frac{CN^2M^{4-2\alpha}}{\eta^2},$$

不等式两边同乘以 $\eta^2(2\lambda NM^2)^{-1}$，则在 X_1 点上

$$\eta^2|Du|^2 \leqslant \frac{C}{N}M^2 + CNM^{2-\alpha}.$$

不等式两边同加上 $NM^2(u(X_1) - u(X_0))^2$，并注意到(4.6)，我们得到

$$M^2 \leqslant \frac{C}{N}M^2 + CNM^{2-\alpha}.$$

适当地取 N 足够大，就可得到 M 的界.

§5 $D_x u$ 的 Hölder 模估计

§4 我们已建立了 $D_x u$ 的最大模估计，因此可以简化 $F(x,t,z,p,r)$ 的结构条件的形式. 我们将结构条件(F4)写成如下形式：

(F4) 对于任意 $(x,t,z,p,r) \in \Omega \times (0,T] \times (-K_0,K_0) \times (-K_1,K_1)^n \times \mathcal{S}^n$，有

$$|F_p| + |F_z| + |F_x| + |F| + |F_t| \leqslant \mu_4(1 + |r|).$$

附注 从下面的证明来看，关于 F_t 的增长条件可放宽为

$$|F_t| \leqslant \mu_4(1 + |r|^2).$$

我们首先建立 $D_x u$ 的 Holder 模内估计. 事实上在 §2 已做好了准备，因此所要的估计水到渠成.

定理 5.1 设 $u \in C(Q_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$ 是方程(2.2)在 Q_T 上的解，且 $D_x u \in C(Q_T) \cap C^{2,1}(Q_T)$，$[u]_{0,Q_T} \leqslant K_0$，$[D_x u]_{0,Q_T} \leqslant K_1$. 又设 F 满足结构条件(F1)，(F4)，则存在 $\beta \in (0,1)$，$C > 0$，使得对于任意 $Q_{R_0}(X_0) \subset Q_T$ 有

$$\operatorname*{osc}_{Q_R(X_0)} Du \leqslant C\left(\frac{R}{R_0}\right)^\beta \left(\operatorname*{osc}_{Q_{R_0}(X_0)} Du + 1\right), \quad \forall\, 0 < R \leqslant R_0, \quad (5.1)$$

其中 β, C 依赖于 $n, \lambda, \Lambda, \mu_4, K_0, K_1, T$.

证明 令 $v_k = D_k u$. 记

$$L_0 w = w_t - \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} D_{ij} w.$$

方程(2.2)关于 x_k 微商后得

$$L_0 v_k - \frac{\partial F}{\partial p_i} D_i v_k = \frac{\partial F}{\partial z} v_k + \frac{\partial F}{\partial x_k}.$$

现在记 $g_i = \dfrac{\partial F}{\partial p_i}$. 由结构条件(F4),有

$$|L_0 v_k - g_i D_i v_k| \leqslant C\Big(1 + \sum_{k=1}^{n} |Dv_k|\Big) \quad (k = 1,2,\cdots,n),$$

$$\sum_{i=1}^{n} g_i^2 \leqslant C\Big(1 + \sum_{k=1}^{n} |Dv_k|^2\Big).$$

由引理 2.2,立即得到所要的结论. 证毕.

为了得到 $D_t u$ 在边界附近的 Holder 模估计,我们需要绕一个弯,先建立 $D_t u$ 的全局估计.

定理 5.2 设 $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,2}(Q_T)$ 是第一初边值问题(2.1),(2.2),(2.3)的解,且 $[u]_0 \leqslant K_0$, $[D_t u]_0 \leqslant K_1$. 又设 F 满足结构条件(F1),(F4),初值 $\varphi \in C^2(\Omega)$, 边值 $g \in C^{2,1}(Q_T)$, 则

$$[u_t]_{0,Q_T} \leqslant K_T, \tag{5.2}$$

其中常数 $K_T > 0$ 只依赖 $n,\lambda,\Lambda,\mu_1,K_0,K_1,T,|\varphi|_2,|g|_{0,1}$.

证明 在 Q_T 上考虑辅助函数

$$w = u_t + N|Du|^2, \tag{5.3}$$

其中 $N > 0$ 是待定常数. 记抛物型算子

$$Lv = v_t - \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} D_{ij} v - \frac{\partial F}{\partial p_i} D_i v,$$

容易计算

$$Lu_t = \frac{\partial F}{\partial z} u_t + \frac{\partial F}{\partial t},$$

$$L(|Du|^2) = -2\frac{\partial F}{\partial r_{ij}} D_{ik} u D_{jk} u + 2D_k u\Big(\frac{\partial F}{\partial z} D_k u + \frac{\partial F}{\partial x_k}\Big).$$

应用结构条件(F1),(F4)可得

$$\begin{aligned} Lw \leqslant{} & C(1 + |D^2 u|)|u_t| + C(1 + |D^2 u|^2) \\ & - \lambda N|D^2 u|^2 + CN(1 + |D^2 u|). \end{aligned}$$

选取 N 足够大,可使在 Q_T 内

$$Lw \leqslant C.$$

现在讨论 w 在抛物边界 $\partial_p Q_T$ 的界. 在 $\Omega \times \{0\}$ 上利用方程(2.2)有

$$|u_t(x,0)| \leqslant |F(x,0,\varphi,D\varphi,D^2\varphi)| \leqslant C.$$

在 $\partial\Omega \times (0,T]$ 上注意 t 是切方向,我们有

$$|u_t| = |g_t| \leqslant C, \quad \forall\ (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T].$$

这样,应用极值原理(可用于 $w - Ct$)可得到 w 的上界,因而也有 u_t 在 Q_T 的上界. 再考虑辅助函数 $w = -u_t + N|Du|^2$ 可得 u_t 的下界估计. 定理证毕.

现在我们回过来讨论 $D_x u$ 在边界附近的 Hölder 模的估计,与 § 3 一样我们将在带有部分平边界的典型区域 $Q_{2,T}$ 上讨论. 由于我们已经建立了 u_t 的全局估计,因此我们不妨可设

$$[u_t]_{0,Q_{2,T}} \leqslant K_T. \tag{5.4}$$

首先我们将建立 $[D_x^2 u]_{\Sigma_{1,T}}$ 的估计.

定理 5.3 设 $u \in C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ 是方程(2.2)的解,且 $D_x u \in C^{2,1}(Q_T)$, $[u]_{0,Q_{2,T}} \leqslant K_0$, $[D_x u]_{0,Q_{2,T}} \leqslant K_1$, $[u_t]_{0,Q_{2,T}} \leqslant K_T$, 满足边条件 $u|_{\Sigma_{2,T}} = 0$. 又设 F 满足结构条件(F1),(F4),则

$$|D_x^2 u|_{\Sigma_{1,T}} \leqslant C, \tag{5.5}$$

其中 C 仅依赖于 $n,\lambda,\Lambda,\mu_4,K_0,K_1,K_T,T,[D_x^2 u]_{0,Q_{2,0}}$.

证明 由边条件,我们知道

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\Sigma_{2,T}} = 0 \quad (i,j = 1,2,\cdots,n-1),$$

我们将估计

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_n}\right|_{\Sigma_{2,T}} \quad (i = 1,2,\cdots,n-1).$$

对于 $h = 1,2,\cdots,n-1$, 令

$$w_h(x,t) = D_h u(x,t) + \sum_{i=1}^{n-1} (D_i u(x,t))^2.$$

记抛物型算子

$$L_0 v = v_t - \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} D_{ij} v.$$

由结构条件(F4)

$$\left| L_0(D_h u) - \frac{\partial F}{\partial p_l} D_{hl} u \right| \leqslant C(1 + |D^2 u|). \tag{5.6}$$

由方程(2.2)我们可解出

$$D_{nn} u = -\frac{1}{a^{nn}} \sum_{(i,j)\neq(n,n)} a^{ij} D_{ij} u + \frac{1}{a^{nn}} [u_t - F(x,t,u,Du,0)], \tag{5.7}$$

其中

$$a^{ij} = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(x,t,u,Du,\tau D^2 u) d\tau.$$

由定理的假定我们有

$$|D_{nn} u| \leqslant C\Big[1 + \sum_{(i,j)\neq(n,n)} |D_{ij} u|\Big].$$

代入(5.6)的右端，对于 $h = 1,2,\cdots,n-1$ 可得

$$\left| L_0(D_h u) - \frac{\partial F}{\partial p_l} D_{hl} u \right| \leqslant C\Big[1 + \sum_{(i,j)\neq(n,n)} |D_{ij} u|\Big]. \tag{5.8}$$

于是对于 $h = 1,\cdots,n-1$，有

$$\begin{aligned} & L_0 w_h - \frac{\partial F}{\partial p_l} D_l w_h \\ & = \left(L_0(D_h u) - \frac{\partial F}{\partial p_l} D_{hl} u \right) \\ & \quad + 2\sum_{i=1}^{n-1} D_i u \left(L_0(D_i u) - \frac{\partial F}{\partial p_l} D_{il} u \right) - 2\sum_{l=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} D_{li} u D_{lj} u \\ & \leqslant C\Big(1 + \sum_{(i,j)\neq(n,n)} |D_{ij} u|\Big) - 2\lambda \sum_{(i,j)\neq(n,n)} |D_{ij} u|^2. \end{aligned}$$

应用结构条件(F4)与 Cauchy 不等式，对于 $h = 1,\cdots,n-1$，我们有

$$\begin{aligned} L_0 w_h & \leqslant C\Big(1 + \sum_{(i,j)\neq(n,n)} |D_{ij} u|\Big)\ (1 + |Dw_h|) - 2\lambda \sum_{(i,j)\neq(n,n)} |D_{ij} u|^2 \\ & \leqslant C(1 + |Dw_h|^2). \end{aligned} \tag{5.9}$$

由定理 4.1，如果 $[D^2 u]_{0,Q_{2,0}} < \infty$，则

$$w_h(x,t) \leqslant C x_n, \quad (x,t) \in Q_{1,T},$$

其中 C 依赖于 $[D_x^2 u]_{0,Q_{2,0}}$. 特别地,上式蕴含着

$$\left.\frac{\partial w_h}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} \leqslant C, \quad \forall\ (x',0,t) \in \Sigma_{1,T},$$

这又蕴含着

$$D_{hn}u\big|_{\Sigma_{1,T}} \leqslant C, \quad \forall\ h = 1,2,\cdots,n-1.$$

在 w_h 的定义中,以 $-D_h u$ 代替 $D_h u$, 可得

$$|D_{nh}u|_{0,\Sigma_{1,T}} \leqslant C, \quad \forall\ h = 1,2,\cdots,n-1.$$

再由(5.7),则有

$$|D_{nn}u|_{0,\Sigma_{1,T}} \leqslant C.$$

断言(5.5)得证. 证毕.

利用已经得到的二阶微商的边界估计我们可以得到 $D_x u$ 在边界附近的 Hölder 模估计.

定理 5.4 在定理 5.3 的条件下,则存在 $\beta \in (0,1)$ 与 $C > 0$ 使得

$$[D_x u]_{\beta,Q_{\frac{1}{2},T}} \leqslant C, \tag{5.10}$$

其中 β, C 仅依赖于定理 5.3 所述的量.

证明 定理 5.3 的结论说明了

$$[D_x u]_{1,\Sigma_{1,T}\cup Q_{1,0}} \leqslant C_1. \tag{5.11}$$

我们考虑函数

$$w_k^{\pm}(x,t) = \pm\, D_k u(x,t) + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} |D_j u|^2(x,t),$$
$$k = 1,2,\cdots,n.$$

类似于(5.9),我们有

$$L_0 w_k^{\pm} \leqslant C_\varepsilon(1 + |Dw_k^{\pm}|^2), \quad k = 1,2,\cdots,n.$$

由引理 3.2 的结论(1)(此时 $\alpha = 1$),对于 $(x,t) \in Q^{\delta}_{\frac{1}{2},T}$, 有

$$w_k^{+}(x,t) - w_k^{+}(x',0,t) \leqslant C_\varepsilon x_n^{1/2}(1 + [w_k]_{1,\Sigma_{1,T}\cup Q_{1,0}}).$$

由 w_k^{+} 的表达式,则在 $Q_{1/2,T}$ 上有

$$[D_k u(x,t) - D_k u(x',0,t)]_{+} - 2\varepsilon K_1 \sum_{j=1}^{n} |D_j u(x,t) - D_j u(x',0,t)|$$

$$\leqslant C_\varepsilon x_n^{1/2}(1+[D_xu]_{1,\Sigma_{1,T}\cup Q_{1,0}}).$$

对 k 从 1 至 n 求和，那么在 $Q_{1/2,T}$ 上有

$$\sum_{k=1}^n [D_ku(x,t)-D_ku(x',0,t)]_+ \\ -2\varepsilon nK_1\sum_{j=1}^n |D_ju(x,t)-D_ju(x',0,t)| \\ \leqslant C_\varepsilon x_n^{1/2}(1+[D_xu]_{1,\Sigma_{1,T}\cup Q_{1,0}}).$$

以 $w_k^-(x,t)$ 代替 $w_k^+(x,t)$ 可得在 $Q_{1/2,T}$ 上

$$\sum_{k=1}^n [D_ku(x,t)-D_ku(x',0,t)]_- \\ -2\varepsilon nK_1\sum_{j=1}^n |D_ju(x,t)-D_ju(x',0,t)| \\ \leqslant C_\varepsilon x_n^{1/2}(1+[D_xu]_{1,\Sigma_{1,T}\cup Q_{1,0}}).$$

两式相加，并取 $\varepsilon=(8nK_1)^{-1}$，则在 $Q_{1/2,T}$ 上有

$$\sum_{k=1}^n |D_ku(x,t)-D_ku(x',0,t)| \leqslant Cx_n^{1/2}(1+[D_xu]_{1,\Sigma_{1,T}\cup Q_{1,0}}).$$

利用这一估计与 $[D_xu]_\beta$ 的内估计，用类似于定理 3.3 的证明方法，可得所要的估计. 证毕.

§6 非散度型拟线性方程古典解的存在性

作为完全非线性方程的特例，本节将讨论拟线性方程

$$u_t-a^{ij}(x,t,u,Du)D_{ij}u+b(x,t,u,Du)=0, \tag{6.1}$$

它满足如下的结构条件：

(F1)′ 存在 $\Lambda\geqslant\lambda>0$ 使得

$$\lambda|\xi|^2\leqslant a^{ij}(x,t,z,p)\xi_i\xi_j\leqslant\Lambda|\xi|^2,$$

$$\forall\,\xi\in\boldsymbol{R}^n,\quad (x,t,z,p)\in\Omega\times(0,T]\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^n;$$

(F2)′ 对于任意 $(x,t,z)\in\Omega\times(0,T]\times\boldsymbol{R}$,

$$\frac{\partial b}{\partial z}(x,t,z,0,0)\geqslant-\mu_1,\quad |b(x,t,0,0)|\leqslant\mu_2;$$

(F3)′ 对于任意 $(x,t,z,p)\in\Omega\times(0,T]\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^n$,

$$|b(x,t,z,p)|\leqslant\mu_3(1+|p|^2);$$

(F4)′ 对于任意 $(x,t,z,p)\in\Omega\times(0,T]\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^n$,

$$(1+|p|)^{-1}|D_xa^{ij}|+|D_ta^{ij}|$$
$$+|D_za^{ij}|+(1+|p|)|D_pa^{ij}|\leqslant\mu_4,$$
$$(1+|p|)^{-1}|D_xb|+|D_tb|$$
$$+|D_zb|+(1+|p|)|b_p|\leqslant\mu_4(1+|p|^2).$$

对于拟线性方程(6.1),事实上就是完全非线性方程(2.2)中 F 取如下的特殊形式

$$F(x,t,z,p,r)=a^{ij}(x,t,z,p)r_{ij}+b^i(x,t,z,p). \tag{6.2}$$

因此对于方程(6.1),结构条件(F1)′～(F4)′蕴含着(F1)～(F4),这样前面5节的结果对于满足结构条件(F1)′～(F4)′的方程(6.1)都是成立的.

这里我们将应用 Leray-Schauder 定理的一个特殊形式来证明第一初边值问题(6.1),(2.3)的古典解的存在性.

定理 6.1(Leray-Schauder) 设 G 是 Banach 空间 X 到自身的一个紧映射,又设存在常数 M 使得

$$\|x_0\|\leqslant M,\quad\forall\, x_0\in\{x\in X\,|\,\exists\,\sigma\in[0,1],\,x=\sigma Gx\},$$

则 G 至少有一个不动点.

定理 6.2 设 $\partial\Omega\in C^{2+\alpha}(0<\alpha<1)$,方程(6.1)的系数 $a^{ij},b\in C^{1,1}(\Omega\times(0,T]\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^n)$ 且满足结构条件(F1)′～(F4)′,初值 $\varphi\in C^{2+\alpha}$,边值 $g\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\partial\Omega\times[0,T])$,且在 $\partial\Omega\times\{t=0\}$ 满足接触条件 $g(x,0)=\varphi(x)$,

$$g_t(x,0)-F(x,0,\varphi,D\varphi,D^2\varphi)=0,\quad\forall\, x\in\partial\Omega, \tag{6.3}$$

其中 F 指表达式(6.2),则初边值问题(6.1),(2.3)至少存在一个解 $u\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_T)$.

证明 我们先设 a^{ij},b关于它们的自变量属于 C^3,构造函数 $\psi(x,t)\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_T)$ 使得当 $x\in\Omega$ 时,$\psi(x,0)=\varphi(x)$,在 $\partial\Omega\times(0,T)$ 上 $\psi(x,t)=g(x,t)$,并满足接触条件(6.3).取 Banach 空间

$$X = \{u \in C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q}_T) \mid u|_{\partial_p Q_T} = 0\},$$

对于任意 $w \in X$，令 $v = w + \psi$. 然后解以下初边值问题：

$$\begin{cases} u_t - a^{ij}(x,t,v,Dv)D_{ij}u + b(x,t,v,Dv) = 0, & (x,t) \in Q_T, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \Omega, \\ u(x,t) = g(x,t), & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T]. \end{cases} \tag{6.4}$$

根据 Schauder 理论，上述线性问题存在唯一的解 $u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_T)$，然后令 $z = u - \psi$，显然 $z \in X$，定义映射 $z = G[w]$，我们将证明 G 是 $X \to X$ 的紧映射. 设 B 是 $C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q}_T)$ 有界集，由 Schauder 估计，$G[B]$ 是 $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_T)$ 的有界集，根据 Ascoli-Arzelá 定理，它在 $C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q}_T)$ 准紧. 其次我们证明 G 是连续的. 设 $w_m \to w$ $(C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{Q}_T))$，记 $z_m = G[w_m]$，要证 $z_m \to z = G[w]$. 事实上由前面推理知道 $\{z_m\}$ 在 $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ 中准紧. 设 $\{z_{m_k}\}$ 是 $\{z_m\}$ 在 $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ 收敛的子序列，它收敛于 $\tilde{z}$. 令 $\tilde{u} = \tilde{z} + \psi$，容易验证 $\tilde{u}$ 是初边值问题(6.4)的解，由于(6.2)关于 u 的方程是线性的，由极值原理必有 $\tilde{u} = u = G[w] + \psi$，这说明 $\{z_m\}$ 的任何收敛子序列都有同一的极限，这样序列 $\{z_m\}$ 本身也必收敛到 z，这就证明了 G 是紧映射.

现在验证 Leray-Schauder 不动点定理的另一个条件，也就是要证明存在常数 $M > 0$，对于 σG 的任意不动点 z，即 $z = \sigma G[z]$，必有 $\|z\|_X \leqslant M$，其中 $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$. 由映射 G 定义，如果 z 是上面所述的不动点，那么 $u = z + \psi$ 是以下初边值问题的解

$$\begin{cases} u_t - a^{ij}(x,t,u,Du)D_{ij}u + \sigma b(x,t,u,Du) = 0, & (x,t) \in Q_T, \\ u(x,0) = \sigma\varphi(x), & x \in \Omega, \\ u(x,t) = \sigma g(x,t), & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T]. \end{cases}$$

由上面 G 的定义的叙述中我们已经知道 $u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_T)$，由分析的知识，我们知道 $a^{ij}(x,t,u,Du), b(x,t,u,Du) \in C_{\mathrm{loc}}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(Q_T)$，再由 Schauder 理论得到 $D_x u \in C_{\mathrm{loc}}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$，这样不断攀升总可达到前面先验估计对于局部正则性的最高要求 $u \in C_{\mathrm{loc}}^{4+\alpha,2+\alpha/2}(Q_T)$，使得我们可以应用定理 5.4 的结果：存在 $\beta \in (0,1)$，$C > 0$ 使得 $[D_x u]_{\beta,Q_T} \leqslant C$，其

中 β,C 都仅依赖于已知数据. 这样 $[a^{ij}]_{\beta,Q_T},[b]_{\beta,Q_T}\leqslant C$，由 Schauder 理论，存在只依赖已知数据的正常数 M 使得 $[u]_{2+\beta,\overline{Q}_T}\leqslant M$，这也蕴含着不动点 $|z|_{1+\alpha,Q_T}\leqslant \widetilde{M}$，这样映射 G 满足 Leray-Schauder 定理的所有条件，算子 G 至少有一个不动点 z，$u=z+\psi\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_T)$ 就是初边值问题(6.1)，(2.2)，(2.3)的古典解.

如果 a^{ij},b 关于它们自变量只属于 C^1，可以用光滑逼近，我们不在这里赘述了.

§7 关于完全非线性方程解的存在性

对于完全非线性方程的初边值问题，Leray-Schauder 定理不再适用，因为不能构造一个紧映射，使得此紧映射的不动点恰好是该初边值问题的解. 这里将用非线性泛函分析中隐函数定理来做连续延拓.

首先我们叙述有关非线性泛函分析的一些基本概念，并不加证明地引述隐函数定理.

设 X_1,X_2 是实 Banach 空间，F 是 $X_1\to X_2$ 的映射，F 在 $u\in X_1$ 上 Fréchet 可微是指存在有界线性算子 $L:X_1\to X_2$ 使得对于任意 $h\in X_1$，都有

$$\|F[u+h]-F[u]-Lh\|_{X_2}=o(\|h\|_{X_1}),\tag{7.1}$$

则称算子 L 为映射 F 在 u 的 Fréchet 导数，记为 F_u.

例 1 如果 F 是 $X_1\to X_2$ 的有界线性算子，则 $F_u=F$.

例 2 如果 $F[u]=u_t-F(D^2u)$，$X_1=C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_T)$，$X_2=C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_T)$，函数 $F\in C^1(\mathscr{S}^n)$，则

$$F_u=D_t-\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}D_{ij}.\tag{7.2}$$

事实上

$$\left\|F[u+h]-F[u]-\left(D_t-\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}D_{ij}\right)h\right\|_{C^{\alpha,\alpha/2}}$$

$$=\left\|u_t+h_t-F(D^2u+D^2h)-u_t+F(D^2u)-h_t+\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}D_{ij}h\right\|_{C^{\alpha,\alpha/2}}$$

$$= \left\| \int_0^1 \frac{\partial F(D^2u + \tau D^2h)}{\partial r_{ij}} D_{ij}h\mathrm{d}\tau - \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(D^2u)D_{ij}h \right\|_{C^{\alpha,\alpha/2}}$$

$$\leqslant \| h \|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}} \int_0^1 \left\| \frac{\partial F(D^2u + \tau D^2h)}{\partial r_{ij}} - \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(D^2u) \right\|_{C^{\alpha,\alpha/2}} \mathrm{d}\tau$$

$$= o(\| h \|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}}).$$

现在设 X_1,Σ,X_2 是实 Banach 空间，映射 G: $X_1 \times \Sigma \to X_2$ 在点 $(u,\sigma) \in X_1 \times \Sigma$ 的 Fréchet 导数记为 $G_{(u,\sigma)}$，对于任意 $h\in X_1,\lambda\in\Sigma$,

$$G_{(u,\sigma)}(h,\lambda) = G^1_{(u,\sigma)}h + G^2_{(u,\sigma)}\lambda,$$

则 $G^1_{(u,\sigma)}$: $X_1 \to X_2$, $G^2_{(u,\sigma)}$: $\Sigma \to X_2$ 称为 G 在 (u,σ) 的 Fréchet 偏导数.

隐函数定理 设 X_1,Σ,X_2 是实 Banach 空间，G 是由 $X_1 \times \Sigma$ 的某开子集到 X_2 的映射，对于 $(u_0,\sigma_0) \in X_1 \times \Sigma$, G 满足：

(1) $G[u_0,\sigma_0] = 0$；

(2) G 在 (u_0,σ_0) 的邻域可微且其 Fréchet 导数在 (u_0,σ_0) 连续；

(3) 关于 u 的 Fréchet 偏导数 $G^1_{(u_0,\sigma_0)}$ 可逆，

则存在 σ_0 在 Σ 的邻域 $\mathscr{N}$，使得 $G[u,\sigma] = 0$ 对于每一个 $\sigma \in \mathscr{N}$ 可解，即对于每一 $\sigma \in \mathscr{N}$，存在 u_σ 使得 $G[u_\sigma,\sigma] = 0$.

现在记

$$F[u] = u_t - F(x,t,u,Du,D^2u).$$

设函数 $\psi(x,t)$ 是定义于整个 $\overline{Q}_T$ 上使得

$$\psi(x,0) = \varphi(x),$$
$$\psi(x,t)|_{\partial\Omega\times[0,T]} = g(x,t).$$

定理 7.1 设 $F \in C^1(\Gamma)$ 且满足结构条件(F1)，如果对于某个 $\beta \in (0,1)$, $\partial\Omega \in C^{2,\beta}$, $\psi \in C^{2,\beta}$，方程(2.2)满足其他结构条件，且对于任意 $\sigma\in[0,1]$，方程 $F[u]-\sigma F[\psi]=0$ 在 $C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{Q}_T)$ 中满足初边值条件(2.3)的所有可能解都有先验估计

$$|u|_{2+\beta,Q_T} \leqslant M, \tag{7.3}$$

其中 $M \geqslant 1$ 只依赖于 n,β,T，结构条件，ψ 与 $\partial\Omega$. 此外又设 F 满足

F5 $\quad F_z(x,t,z,p,r) \leqslant \mu_5, \quad \forall\ (x,t,z,p,r) \in \Gamma,$

其中 $\mu_5 \geqslant 0$，则第一初边值问题(6.1)，(2.3)存在解 $u \in$

$C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{Q}_T)$.

证明 在上面隐函数定理中取 $X_1=\{v\in C^{2+\beta,1+\beta/2}\overline{Q})\,|\,v|_{\partial_p Q_T}=0\}$，$X_2=C^{\beta,\beta/2}(\overline{Q}_T)$，$\Sigma=[0,1]$. 现在定义 G：$X_1\times[0,1]\to X_2$，

$$G[v,\sigma]=F[v+\psi]-\sigma F[\psi]. \tag{7.4}$$

我们将解方程 $G[v,\sigma]=0$，容易看出当 $\sigma=0$ 时，$G[v,0]=0$. 如果有解 $v_0\in X_1$，则 $u=v_0+\psi$ 必为初边值问题(6,1)，(2.3)的解. 现在记集合

$$S=\{\sigma\in[0,1]\,|\,\exists\ v\in X_1, s.t.\ G[v,\sigma]=0\}. \tag{7.5}$$

首先我们知道 S 是非空的，这是因为当 $\sigma=1$ 时，$v\equiv 0$ 是隐函数方程 $G[v,\sigma]=0$ 的解，即 $1\in S$. 我们将证明集合 S 相对于 $[0,1]$ 既开又闭，则 $S=[0,1]$，这就蕴含定理的结论.

我们可以应用隐函数定理来证明 S 相对于 $[0,1]$ 是开的，设 $\sigma_0\in S$，由集合 S 的定义，必存在 $v_0\in X_1$ 使得 $G[v_0,\sigma_0]=0$，容易计算 Fréchet 偏导数

$$G^1_{(v_0,\sigma_0)}=\left[D_t-\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}D_{ij}-\frac{\partial F}{\partial p_i}D_i-\frac{\partial F}{\partial z}I\right]_{(z,p,r)=(v_0+\psi,D(v_0+\psi),D^2(v_0+\psi))},$$

其中 I 是恒同算子. 这是一个由 $X_1\to X_2$ 的线性一致抛物型算子，由假定(F5)，极值原理与 Schauder 理论，$G^1_{(v_0,\sigma_0)}$ 是可逆的，由隐函数定理，存在 σ_0 的邻域 $\mathscr{N}\cap[0,1]$ 使得当 $\sigma\in\mathscr{N}\cap[0,1]$ 时，$G[v,\sigma]=0$ 是可解的，即 $\mathscr{N}\cap[0,1]\subset S$.

现在再证明 S 是闭的，这就需要用到应用关于先验估计的假定(7.3). 设 $\sigma_n\in S$，当 $n\to\infty$ 时 $\sigma_n\to\sigma_0$，要证 $\sigma_0\in S$. 由集合 S 的定义，存在 $v_n\in X_1$ 使得 $G[v_n,\sigma_n]=0$，即

$$v_n\in C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{Q}_T),\quad v_n|_{\partial_p Q_T}=0,$$

$$F[v_n+\psi]-\sigma_n F[\psi]=0. \tag{7.6}$$

由(7.3)，则 $|v_n+\psi|_{2+\beta}\leqslant M$，由 Ascoli-Arzelá 定理，$\{v_n\}$ 必存在于 $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ 收敛的子序列收敛到某函数 v_0，且 $v_0\in C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{Q}_T)$，在(7.6) 中按此序列取极限后可得

$$F[v_0+\psi]-\sigma_0 F[\psi]=0,$$

即 $\sigma_0\in S$. 定理得证.

由定理 7.1 我们可以看出，对于完全非线性抛物型方程的第一初边值问题，其可解性可以归结为先验估计(7.3)，即解的 $C^{2+\beta,1+\beta/2}$ 全局先验估计.

§8　主项方程解的 $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}$ 内估计

我们将用凝固法来讨论一般形式的完全非线性一致抛物型方程，因为这样往往能得到更好的结果，要求更少的条件. 所以本节将讨论以下方程

$$u_t - F(D^2u) = 0, \tag{8.1}$$

其中 $F(0)=0$，我们称它为**主项方程**. 假定它满足以下的结构条件：

(F1) $\exists\ \Lambda \geqslant \lambda > 0$ 使得

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(r) \leqslant \Lambda|\xi|^2, \quad \forall\ \xi \in \boldsymbol{R}^n;$$

(F6) $F(r)$ 关于变量 r 是凹的.

附注　将(F6)更换为：$F(r)$ 关于变量 r 是凸的，所有的结果仍然成立. 为了确定性起见，我们只用凹性条件(F6).

我们现在讨论 D^2u 的 Holder 模估计. 这里需要一个关于正定矩阵的分解引理. 对于 $\lambda>0$，记

$$S[\lambda] = \{A \in \mathscr{S}^n \mid \lambda I < A < \lambda^{-1}I\}.$$

引理 8.1　存在 $\rho_0 > 0$ 与 N 个单位向量 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_N \in \boldsymbol{R}^n$，使得对于任意 $A \in S[\lambda]$，都可表成

$$A = \sum_{i=1}^{N}\beta_i(A)\gamma_i \otimes \gamma_i, \quad \rho_0 \leqslant \beta_i(A) \leqslant \rho_0^{-1}(i=1,\cdots,N),$$

其中 $\rho_0,\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_N$ 与 N 仅依赖于 n,λ，且 $\gamma_i(i=1,2,\cdots,N)$ 可包含 $e_i,(e_i \pm e_j)/\sqrt{2}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$，这里 e_i 表示第 i 个坐标向量.

证明　在 $n(n+1)/2$ 维空间 $\mathscr{S}^n$ 中 $S[\lambda]$ 是凸开集且 $S[\lambda] \subset\subset S[\lambda/2]$，存在一个开的凸多面体 π 使得

$$S[\lambda] \subset\subset \pi \subset S[\lambda/2].$$

设矩阵 $A_1,\cdots,A_{N_1}$ 是 π 的顶点，A_k 的特征值为 $\lambda_i(k) \geqslant 0$，相应的特征向量为 $l_i(k)(i=1,2,\cdots,n)$. 我们将证明 $\{l_i(k)\}$ $(k=1,\cdots,N_1;i=$

$1,2\cdots,n$) 就是所求的向量组 $\{\gamma_i\}$ (可以再添加 $e_i,(e_i\pm e_j)/\sqrt{2}$).

由于 $S[\lambda]\subset\subset\pi$，一定存在 $\rho_0>0$ 使得

$$S[\lambda]-\rho_0\sum_{k=1}^{N_1}\sum_{i=1}^{n}l_i(k)\otimes l_i(k)\subset\bar{\pi}.$$

由于 π 是凸多面体，对于任意 $A\in S[\lambda]$,

$$\begin{aligned}A-\rho_0&\sum_{k=1}^{N_1}\sum_{i=1}^{n}l_i(k)\otimes l_i(k)\\&=\sum_{k=1}^{N_1}p_kA_k=\sum_{k=1}^{N_1}p_k\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(k)l_i(k)\otimes l_i(k),\end{aligned}$$

其中 $p_k\geqslant 0\ (k=1,2,\cdots,N_1)$, $\sum p_k\leqslant 1$. 于是

$$A=\sum_{k=1}^{N_1}\sum_{i=1}^{n}(\rho_0+p_k\lambda_i(k))l_i(k)\otimes l_i(k).$$

这蕴含了所要的结果. 引理证毕.

我们还需要一个引理，在内估计中它经常起重要的作用，可以避免引进内部范数.

引理 8.2 设 $\varphi(t)$ 是定义于区间 $[T_0,T_1]$ 上的有界非负函数，其中 $T_1>T_0\geqslant 0$，对于任意 s,t: $T_0\leqslant t<s\leqslant T_1$，$\varphi$ 满足

$$\varphi(t)\leqslant\theta\varphi(s)+\frac{A}{(s-t)^\alpha}+B,\tag{8.2}$$

其中 θ,A,B 与 α 是非负常数，$\theta<1$. 则

$$\varphi(\rho)\leqslant C\left[\frac{A}{(R-\rho)^\alpha}+B\right],\quad\forall\, T_0\leqslant\rho<R\leqslant T_1,\tag{8.3}$$

这里 C 只依赖于 α,θ.

证明 令 $t_0=\rho$, $t_{i+1}=t_i+(1-\tau)\tau^i(R-\rho)$ $(i=0,1,2,\cdots)$，其中 $0<\tau<1$ 待定. 由条件(8.2)，我们有

$$\varphi(t_i)\leqslant\theta\varphi(t_{i+1})+\frac{A}{[(1-\tau)\tau^i(R-\rho)]^\alpha}+B$$

$(i=0,1,2,\cdots)$，递推之后可得

$$\varphi(t_0)\leqslant\theta^k\varphi(t_k)+\left[\frac{A}{(1-\tau)^\alpha(R-\rho)^\alpha}+B\right]\sum_{i=0}^{k-1}\theta^i\tau^{-i\alpha}.$$

选择 τ 使得 $\theta\tau^{-\alpha}<1$，令 $k\to\infty$，则有(8.3). 证毕.

下面我们讨论 $D_t u$ 与 $D^2 u$ 的 Holder 模内估计.

定理 8.3 设 $u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$ 是方程(8.1)在 Q_T 上的解，$\alpha \in (0,1)$. 又设 F 满足结构条件(F1),(F6),则存在 $\beta \in (0,1)$,$C>0$ 使得对于任意的 $Q_R(X_0) \subset Q_T$，都有

$$\underset{Q_\rho(X_0)}{\operatorname{osc}} u_t \leqslant C\left(\frac{\rho}{R}\right)^\beta |u_t|_{0,Q_R(X_0)},$$

其中 β, C 只依赖 n,λ,Λ.

证明 不妨设 $u_t \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$，不然我们用差商代替. 方程(8.1) 关于 t 微商后得到

$$D_t(u_t) - \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} D_{ij} u_t = 0.$$

由结构条件(F1)与第七章的结果可得所要的结论. 证毕.

定理 8.4 设 $u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$ 是方程(8.1)在 Q_T 上的解，$\alpha \in (0,1)$. 又设 F 满足结构条件(F1),(F6),则存在 $\beta \in (0,1)$,$C>0$ 使得对于任意的 $Q_R(X_0) \subset Q_T$，都有

$$\underset{Q_\rho(X_0)}{\operatorname{osc}} D^2 u \leqslant C\left(\frac{\rho}{R}\right)^\beta ([u]_{2,Q_R(X_0)} + 1), \quad \forall \rho \in (0,R),$$

其中 β, C 只依赖 n,λ,Λ, 半模

$$[u]_{2,Q} = |D^2 u|_{0,Q} + |D_t u|_{0,Q}.$$

证明 不妨设 $\Lambda = \lambda^{-1}$，对于 $S[\lambda]$ 由引理 8.1 可确定 ρ_0 与向量 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_N$ 并使它们包括 $e_i,(e_i \pm e_j)/\sqrt{2}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$. 记 $K_2 = |D^2 u|_{0,Q_R(X_0)} + |D_t u|_{0,Q_R(X_0)}$，我们可以先用一阶差商代替微商，定性地得到 $D_x u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$，对于二阶方向微商，我们可以用二阶差商来代替二阶方向微商，也可定性地得到 $D_x^2 u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$. 令

$$W_k = u_{\gamma_k\gamma_k} \quad (k=1,2,\cdots,N),$$

其中 u_{γ_k} 是 u 关于 γ_k 的方向微商. 由于结构条件(F6)，即 F 关于 r 是凹的，因此

$$L u_{\gamma_k\gamma_k} \leqslant 0 \quad (k=1,2,\cdots,N),$$

其中抛物型算子

$$Lv = v_t - \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} D_{ij} v.$$

上面的不等式满足基本引理 1.1 的第一个条件(1.5).

对于任意 $X,Y\in Q_R(X_0)$,

$$[u_t-F(D^2u)]_X-[u_t-F(D^2u)]_Y=0.$$

注意到定理 8.3 我们有

$$|a^{ij}(D_{ij}u(X)-D_{ij}u(Y))|\leqslant CK_2\frac{d^\beta(X,Y)}{R^\beta},$$

其中

$$a^{ij}=\int_0^1\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(D^2u(\eta X+(1-\eta)Y))\mathrm{d}\eta.$$

应用引理 8.1 可得

$$\begin{aligned}CK_2\frac{d^\beta(X,Y)}{R^\beta}&\geqslant a^{ij}(D_{ij}u(X)-D_{ij}u(Y))\\&\geqslant\sum_{k=1}^N\beta_k(u_{\gamma_k\gamma_k}(X)-u_{\gamma_k\gamma_k}(Y))\\&\geqslant\rho_0\sum_{k=1}^N[u_{\gamma_k\gamma_k}(X)-u_{\gamma_k\gamma_k}(Y)]_+\\&\quad-\rho_0^{-1}\sum_{k=1}^N[u_{\gamma_k\gamma_k}(X)-u_{\gamma_k\gamma_k}(Y)]_-.\end{aligned}$$

由基本引理 1.1,存在 $\alpha\in(0,\beta]$, $C>0$ 使得

$$\sum_{k=1}^N\operatorname*{osc}_{Q_\rho(X_0)}D_{\gamma_k\gamma_k}u\leqslant C(K_2+1)\left(\frac{\rho}{R}\right)^\alpha.$$

这个结果与向量组 $\{\gamma_k\}$ 的构成就蕴含定理的结论. 证毕.

附注 在定理 8.3 及定理 8.4 的证明中应用了以下正则性的结果:如果 $F(r)$ 是光滑的(例如属于 C^3),如果主项方程(8.1)的解 $u\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_1)$, 则可利用差商与 Schauder 理论逐阶逐项定性地得到 $u\in C^{4+\alpha,2+\alpha/2}(Q_1)$.

利用上面的估计与 Holder 空间的内插不等式,我们可以得到解的 $C^{2+\beta,1+\beta/2}$ 内估计. 注意,定理 8.3 与定理 8.4 并没有完全给出解的 $C^{2+\beta,1+\beta/2}$ 内估计,因为估计的右端项包含有 $[D^2u]_0$ 模,这是我们还没有给出估计的模.

定理 8.5 设 $u\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_1)$是方程(8.1)在 $Q_1=B_1\times(-1,0]$

上的解，$\alpha\in(0,1)$．又设 F 满足结构条件(F1)，(F6)，则存在 $\beta\in(0,\alpha)$，$C\geqslant 1$ 使得对于任意的 $0<\rho<R\leqslant 1$，都有

$$[D^2u]_{\beta,Q_\rho}+[D_tu]_{\beta,Q_\rho}\leqslant\frac{C}{(R-\rho)^{2+\beta}}(|u|_{0,Q_R}+1),\tag{8.4}$$

其中 β,C 只依赖 n,λ,Λ．

证明　记

$$\Phi(\rho)=[D^2u]_{\beta,Q_\rho}+[D_tu]_{\beta,Q_\rho},\tag{8.5}$$

其中 β 由定理 8.3，定理 8.4 确定．对于任意 $X_0\in Q_r$，显然 $Q_{R-r}(X_0)\subset Q_R$，由定理 8.3 与 8.4，对于任意 $0<\rho<R-r\leqslant 1$，我们有

$$\underset{Q_\rho(X_0)}{\operatorname{osc}}D^2u+\underset{Q_\rho(X_0)}{\operatorname{osc}}D_tu\leqslant C\left(\frac{\rho}{R-r}\right)^\beta([u]_{2,Q_R}+1),\tag{8.6}$$

因此

$$[u]_{2+\beta,Q_r}\leqslant\frac{C}{(R-r)^\beta}([u]_{2,Q_R}+1).\tag{8.7}$$

利用内插不等式，对于任意 $\varepsilon\in(0,1)$，$r<R\leqslant R_0$，我们有

$$[u]_{2+\beta,Q_r}\leqslant\varepsilon[u]_{2+\beta,Q_R}+\frac{C_\varepsilon}{(R-r)^{2+\beta}}([u]_{0,Q_{R_0}}+1).\tag{8.8}$$

利用(8.5)的记号，取 $\varepsilon=1/2$，(8.8)可写成

$$\Phi(r)\leqslant\frac{1}{2}\Phi(R)+\frac{C}{(R-r)^{2+\beta}}([u]_{0,Q_{R_0}}+1).\tag{8.9}$$

应用引理 8.2，我们得到对于任意 $0<r\leqslant R_0$，

$$\Phi(r)\leqslant\frac{C}{(R_0-r)^{2+\beta}}([u]_{0,Q_{R_0}}+1).$$

这就是所要的．

§9　主项方程解在边界附近 $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}$ 估计

本节要建立 D^2u 在边界附近的 Holder 模估计，为此 Krylov 讨论了一类在边界上退化的抛物型方程．记柱体

$$Q_{R,h}^\delta=\{(x,t)\mid |x_i|<R,\ i=1,2,\cdots,n-1,$$
$$0<x_n<2\delta R,\ -h<t\leqslant 0\},$$

$$\Sigma_{R,h} = \overline{Q}^{\delta}_{R,h} \cap \{x_n = 0\}.$$

我们仍然记局部邻域

$$Q_R = \{(x,t) \mid -R^2 < t \leqslant 0,\ |x_i| < R,\ i = 1,2,\cdots,n\},$$

$$Q^{\delta}_R = \{(x,t) \mid -R^2 < t \leqslant 0,\ 0 < x_n < 2\delta R,$$
$$|x_i| < R,\ i = 1,\cdots,n-1\}.$$

现在在 $Q_{2,T}$ 上考虑退化抛物型算子

$$\mathscr{L}v = x_n v_t - x_n a^{ij} D_{ij} v + b^i D_i v + cv. \tag{9.1}$$

假设 $\mathscr{L}$ 的系数满足条件：

(E1) 存在 $\Lambda \geqslant \lambda > 0$，使得对于任意 $(x,t) \in Q_{2,T}$ 有

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant a^{ij}\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2;$$

(E2) $\| a^{ij} \|_\infty, \| b^i \|_\infty, \| c \|_\infty \leqslant \Lambda$;

(E3) $2a^{nn} + b^n - cx_n \leqslant 0,\quad c \geqslant 0.$

我们记

$$M(R,h) = \sup_{Q^{\delta}_{R,h}} v(x,t),\ m(R,h) = \inf_{Q^{\delta}_{R,h}} v(x,t),$$
$$\omega(R,h) = M(R,h) - m(R,h).$$

与前面的记号相同，如果 $h = R^2$，则省略上述记号中的 h.

引理 9.1 对于 $\beta \in (0,1)$，存在 $\delta,\gamma,\theta \in (0,1)$ 使得如果 $v \in C^{2,1}(Q^{\delta}_R) \cap C(\overline{Q}^{\delta}_R)$ 满足

$$\mathscr{L}v = 0,\quad v \geqslant 0, \tag{9.2}$$

$$\text{meas}\{(x,t) \in Q^{\delta}_R \cap \{t < -R^2/4\} \mid v(x,t) \geqslant 1\}$$
$$\geqslant \beta\, \text{meas} Q^{\delta}_R \cap \{t < -R^2/4\}. \tag{9.3}$$

又设 $\mathscr{L}$ 的系数在 Q^{δ}_R 上满足(E1),(E2),(E3),则有

$$\inf_{Q^{\delta}_{\theta R}} v(x,t) \geqslant \gamma > 0,$$

其中 δ,θ 仅依赖于 n,λ,Λ; γ 除上述量外还依赖于 β.

证明 不妨设 $R=1$. 记 Q^{δ}_1 的子区域

$$S_\delta = \bigcup_{i=1}^{n-1}\left\{1 > |x_i| \geqslant 1 - \frac{\beta}{2(n+1)}\right\} \cup \left\{x_n \leqslant \frac{\delta\beta}{n+1}\right\}$$

$$\cup\left\{-\frac{1}{4}>t\geqslant-\frac{1}{4}-\frac{\beta}{n+1}\right\}.$$

容易计算测度

$$|S_\delta\cap Q_1^\delta|<\beta\mathrm{meas}Q_1^\delta\cap\{t<-1/4\},$$

因此，由假定(9.3)，必存在 $X_0=(x^0,t^0)\in Q_1^\delta\backslash S_\delta$，即

$$|x_n^0|\geqslant\frac{\delta\beta}{n+1},\quad t^0\leqslant-\frac{\beta}{n+1}-\frac{1}{4},$$

$$|x_i^0|\leqslant1-\frac{\beta}{2(n+1)}\quad(i=1,2,\cdots,n-1),$$

使得 $v(x^0,t^0)\geqslant1$. 考虑区域 $Q_1^\delta\cap\{x_n\geqslant\delta\beta/2(n+1)\}$，方程(9.1)在其上为非退化的，由非退化方程的 Harnack 不等式，存在 $\rho>0$ 使得

$$v(x,t)|_{x_n=3\delta/4}\geqslant\rho>0,\quad|x'|\leqslant\frac{3}{4},\quad-\frac{1}{4}\leqslant t<0,$$

其中 ρ 只依赖于 $n,\lambda,\Lambda,\beta,\delta$. 在区域

$$\mathscr{N}=\left\{(x,t)\,\middle|\,|x'|\leqslant\frac{3}{4},\ 0<x_n<\frac{3}{4}\delta,\ -\frac{1}{4}<t\leqslant0\right\}$$

上考虑辅助函数

$$Z(x,t)=\rho\left(\frac{1}{2}-\frac{16}{9}|x'|^2+\frac{2x_n}{3\delta}+4t-\frac{\varepsilon}{x_n}\right),$$

其中 ε 是任意的小正数. 由方程满足的条件(E1)～(E3)，选择 $\delta\leqslant\lambda/\Lambda$，则在 Q_1^δ 上 $b^n\leqslant-\lambda<0$. 容易计算

$$\begin{aligned}\mathscr{L}Z=&\rho\left(4x_n+\frac{32}{9}\sum_{i=1}^{n-1}x_na^{ii}-\frac{32}{9}\sum_{i=1}^{n-1}b^ix_i+\frac{2b^n}{3\delta}\right)\\&+\rho\left(\frac{2\varepsilon}{x_n^2}a^{nn}+b^n\frac{\varepsilon}{x_n^2}-\frac{c\varepsilon}{x_n}\right)+c\rho\left(\frac{1}{2}-\frac{16}{9}|x'|^2+\frac{2x_n}{3\delta}+4t\right)\\\leqslant&\rho\left(-\frac{\lambda}{3\delta}+\tilde{C}\right)+\frac{\rho\varepsilon}{x_n^2}[2a^{nn}+b^n-cx_n],\end{aligned}$$

其中 $\tilde{C}$ 与 ε,δ,ρ 无关. 取 $\delta=\frac{\lambda}{3\tilde{C}}$，注意条件(E3)，则在 $\mathscr{N}$ 上有

$$\mathscr{L}Z<0\leqslant\mathscr{L}v.\tag{9.4}$$

此外在 $\mathscr{N}$ 的抛物边界除 $x_n=0$ 外，

$$Z|_{x_n=3\delta/4}\leqslant\rho,\quad Z|_{|x'|=3/4}\leqslant0,\quad Z|_{t=-1/4}\leqslant0.$$

因此 $Z(x,t)-v(x,t)$ 只能在 $\mathscr{N}$ 内部达到正最大值，但(9.4)表明这

是不可能的，因而在 $\mathscr{N}$ 上

$$Z(x,t)-v(x,t)\leqslant 0.$$

由 ε 的任意性可知在 $\mathscr{N}$ 上有

$$v(x,t)\geqslant\rho\left(\frac{1}{2}-\frac{16}{9}|x'|^2+\frac{2x_n}{3\delta}+4t\right),$$

只需取 θ 适当小，就有

$$\inf_{Q_\theta^\delta} v(x,t)\geqslant\frac{\rho}{4}.$$

这就是我们所要的. 引理证毕.

由这个引理，用通常的方法就可建立函数 $v(x,t)$ 的 Hölder 估计. 对于引理 9.1 所确定的 δ，我们容易得到

引理 9.2 设 $v\in C^{2,1}(Q_R^\delta)\cap C(\overline{Q}_R^\delta)$，是退化方程(9.1)的解，$\mathscr{L}$ 的系数在 Q_R^δ 满足(E1)～(E3)，则存在 $\beta\in(0,1)$，$C>0$ 使得

$$\operatorname*{osc}_{Q_\rho^\delta} v\leqslant C\left(\frac{\rho}{R}\right)^\beta|v|_{0,Q_R^\delta},\quad\forall\ 0<\rho\leqslant R,$$

其中 C,β 仅依赖于 n,λ,Λ,δ.

此引理可作为读者的一个练习.

引理 9.3 在引理 9.2 的条件除 $\mathscr{L}v=0$ 外其余均满足，则存在 $\beta\in(0,1)$，$C>0$ 使得

$$\operatorname*{osc}_{Q_\rho^\delta} v\leqslant C\left(\frac{\rho}{R}\right)^\beta(\|v\|_{\infty,Q_R^\delta}+R\|\mathscr{L}v\|_{\infty,Q_R^\delta}),\quad\forall\ 0<\rho\leqslant R,\tag{9.5}$$

其中 C,β 仅依赖于 n,λ,Λ.

证明 记 $P=\|\mathscr{L}v\|_{\infty,Q_R^\delta}$. 引进自变量 x_0，并令

$$w(x_0,x_1,\cdots,x_n,t)=\frac{1}{P}v(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)+x_0.$$

记 $\widetilde{Q}_R^\delta=(-R,R)\times Q_R^\delta$，则 $w(x_0,x_1,\cdots,x_n,t)$ 在 $\widetilde{Q}_R^\delta$ 上满足方程

$$\widetilde{\mathscr{L}}w=\mathscr{L}w-\frac{\mathscr{L}v}{P}\frac{\partial w}{\partial x_0}-x_n\frac{\partial^2 w}{\partial x_0^2}=0.$$

显然 $\widetilde{\mathscr{L}}$ 在 $\widetilde{Q}_R^\delta$ 上满足引理 9.2 的条件，因而

$$\operatorname*{osc}_{Q_\rho^\delta} w \leqslant C\left(\frac{\rho}{R}\right)^\beta (\| w \|_{\infty,Q_R^\delta}), \quad \forall\ 0 < \rho \leqslant R. \tag{9.6}$$

由此不难得到引理的结论.

为了给出 $D_x^2 u$ 在整个 $\Sigma_{1,T}$ (包括 $t=0$ 附近)上的 Holder 模的估计,我们还需要以下的引理:

引理 9.4　设 $v \in C(\overline{Q}_{R,T}) \cap C^2(Q_{R,T})$ 在 $Q_{R,T}$ 满足方程(8.1),方程满足条件(E1),(E2),(E3),$R \leqslant 1$. 则当 $t \in [0,T]$ 时,我们有

$$|v(0,t) - v(0,0)| \leqslant C\frac{t^{\alpha/(2+3\alpha)}}{R^\alpha}([v]_{\alpha,Q_{R,0}} + [v]_{0,Q_{R,T}} + \| \mathscr{L} v \|_{\infty,Q_{R,T}}), \tag{9.7}$$

其中 α, C 仅依赖于 n,λ,Λ 与 T.

证明　当 $t > R^{1/(2+3\alpha)}$ 时,取 $C=2$,论断是显然的. 现在设 $t \leqslant R^{1/(2+3\alpha)}$,又不妨设

$$[v]_{\alpha,Q_{R,0}} + [v]_0 + \| \mathscr{L} v \|_\infty = 1. \tag{9.8}$$

在 $Q_{\varepsilon,T}$ 上考虑辅助函数

$$w(x,t) = \varepsilon^\alpha + \frac{2|x|^2}{\varepsilon^2} + \frac{K}{\varepsilon}\left(\frac{t}{\delta} + \frac{x_n}{K} + 2\sqrt{2\delta\varepsilon} - 2\sqrt{\delta x_n}\right) + \frac{\varepsilon_1}{x_n}, \tag{9.9}$$

其中 ε_1 是任意正数,K 是待定正常数,ε 与 δ 是满足 $\delta \leqslant \varepsilon \leqslant R$ 的正常数. 简单计算可得当 $(x,t) \in Q_{\varepsilon,T}$ 时,

$$\begin{aligned}\mathscr{L} w = & -\frac{4\sum a^{ii} x_n}{\varepsilon^2} + \frac{4b^i x_i}{\varepsilon^2} + \frac{K x_n}{\varepsilon\delta} + \frac{b^n}{\varepsilon} \\ & - \frac{K}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\delta}{x_n}}\left(b^n + \frac{1}{2}a^{nn}\right) + c\left(w - \frac{\varepsilon_1}{x_n}\right) \\ & - \frac{\varepsilon_1}{x_n^2}(2a^{nn} + b^n - c x_n) \\ \geqslant & \frac{K x_n}{\varepsilon\delta} - \frac{K}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\delta}{x_n}}\left(b^n + \frac{1}{2}a^{nn}\right) - \frac{C}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

应用条件(E2),(E3),当 $\varepsilon \leqslant \dfrac{\lambda}{2\Lambda}$ 时,

$$b^n + \frac{1}{2}a^{nn} \leqslant -\frac{3}{2}a^{nn} + cx_n \leqslant -a^{nn}.$$

在前式中分 $x_n \geqslant \delta$ 与 $x_n < \delta$ 两种情况，并取 K 充分大，则有

$$\mathscr{L}w \geqslant \frac{K}{2\varepsilon}\min\{\lambda,1\}, \quad (x,t) \in Q_{\varepsilon,T}.$$

又取 K 适当地大可使

$$\mathscr{L}w \geqslant \pm \mathscr{L}(v(x,t) - v(0,0)), \quad (x,t) \in Q_{\varepsilon,T}.$$

由(9.8)容易验证

$$w|_{t=0} \geqslant \pm (v(x,0) - v(0,0)),$$

$$w \geqslant \pm (v(x,t) - v(0,0)), \quad \max_{1\leqslant m\leqslant n-1}|x_i| = \varepsilon,$$

$$w \geqslant \pm (v(x,t) - v(0,0)), \quad x_n = 2\varepsilon.$$

由极值原理

$$|v(x,t) - v(0,0)| \leqslant w(x,t), \quad (x,t) \in Q_{\varepsilon,T}.$$

令 $\varepsilon_1 \to 0$，得到

$$|v(x,t) - v(0,0)| \leqslant \varepsilon^\alpha + \frac{2|x|^2}{\varepsilon^2} + \frac{K}{\varepsilon}\left(\frac{t}{\delta} + \frac{x_n}{K} + 2\sqrt{2\delta\varepsilon} - 2\sqrt{\delta x_n}\right).$$

又令 $x \to 0$，则有

$$|v(0,t) - v(0,0)| \leqslant \varepsilon^\alpha + \frac{Kt}{\varepsilon\delta} + 2\sqrt{\frac{2\delta}{\varepsilon}}.$$

对于固定的 $t > 0$，取

$$\delta = t^{\frac{1+2\alpha}{2+3\alpha}}, \quad \varepsilon = t^{\frac{1}{2+3\alpha}}(\leqslant R),$$

则可得到

$$|v(0,t) - v(0,0)| \leqslant Ct^{\frac{\alpha}{2+3\alpha}}.$$

这蕴含着所要的结果. 引理证毕.

下面我们将考虑含有抛物边界的局部邻域. 记

$$(Q^+)_R^\eta = \{(x,t) \mid -R^2 < t \leqslant 0,\ 0 < x_n \leqslant 2\eta R,$$
$$|x_i| < R,\ i = 1,\cdots,n-1\},$$

$$M_R = \{(x,t) \mid 0 < t < R^2,\ |x_i| < R,\ i = 1,\cdots,n\},$$

$$M_R^+ = M_R \cap \{x_n > 0\},\ \Sigma_R = \overline{Q}_R^+ \cap \{x_n = 0\}.$$

其中 $0 \leqslant \eta \leqslant 1$. 如果 $\eta = 1$，我们将 $(Q^+)_R^\eta$ 简记为 Q_R^+.

引理 9.5　设 $u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_R^+)$ 满足

$$|Lu| \leqslant \mu, \qquad u|_{\Sigma_R} = 0,$$

其中 $\alpha \in (0,1)$, $Lu = u_t - a^{ij}D_{ij}u$, a^{ij} 满足条件(E1)，则存在 $\beta \in (0,1)$，$C \geqslant 1$ 使得

$$[D_x u]_{\beta,\Sigma_{7R/8}} \leqslant \frac{C}{R^\beta}(\mu + 1 + |D_x u|_{0,Q_R^+}), \tag{9.10}$$

其中 $\beta, C > 0$ 仅依赖于 n, λ, Λ.

证明　在 Q_R^+ 上考虑函数

$$v(x,t) = \frac{u(x,t)}{x_n},$$

则 $v(x,t)$ 满足方程

$$\mathscr{L}v = x_n v_t - x_n a^{ij}D_{ij}v - 2a^{in}D_i v, \quad |\mathscr{L}v| \leqslant \mu, \tag{9.11}$$

容易验证此方程满足条件(E1)，(E2)，(E3). 由引理 9.3，对于任意 $X_0 \in \Sigma_{7R/8}$，由于 $X_0 + Q_{7R/8}^+ = Q_{7R/8}^+(X_0) \subset Q_R^+$，则存在 $\beta \in (0,1)$，$C > 0$ 使得

$$\operatorname*{osc}_{Q_\rho^+(X_0)} v \leqslant C\left(\frac{\rho}{R}\right)^\beta [\| v \|_{\infty,Q_R^+} + \mu R + 1], \quad \forall\ 0 < \rho \leqslant 7R/8.$$

由此可得

$$[v]_{\beta,Q_{7R/8}^+(X_0)} \leqslant CR^{-\beta}[\| v \|_{\infty,Q_R^+} + \mu + 1].$$

注意到 $v = u/x_n$ 与 $u|_{\Sigma_R} = 0$，因而有

$$[D_n u]_{\beta,\Sigma_{7R/8}} \leqslant CR^{-\beta}[\| v \|_{\infty,Q_R^+} + \mu + 1].$$

引理得证.

引理 9.6　设 $u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_R^+)$ 是方程(8.1)的解，$\alpha \in (0,1)$，且 $u|_{\Sigma_R} = 0$. 又设 F 满足结构条件 (F1)，则存在 $\beta \in (0,1)$，$C \geqslant 1$ 使得

$$[D_x^2 u]_{\beta,\Sigma_{7R/8}} \leqslant CR^{-\beta}([u]_{2,Q_R^+} + 1), \tag{9.12}$$

其中 β, C 仅依赖于 n, λ, Λ.

证明 由定理 8.4 后面的附注,可定性的知道 $u\in C^{4+\alpha,2+\alpha/2}(Q_R^+)$. 令 $w=D_ku\ (k=1,2,\cdots,n-1)$, 它在 Q_R^+ 满足方程

$$Lw=w_t-\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}D_{ij}w=0,$$

且 $w|_{\Sigma_R}=0$, 由引理 9.5,存在 $\beta\in(0,1)$,$C>0$ 使得

$$[D_nw]_{\beta,\Sigma_{7R/8}}\leqslant CR^{-\beta}([u]_{2,Q_R^+}+1),$$

即

$$[D_{kn}u]_{\beta,\Sigma_{7R/8}}\leqslant CR^{-\beta}([u]_{2,Q_R^+}+1)\quad (k=1,2,\cdots,n-1).$$

此外显然 $D_{ij}u|_{\Sigma_R}=0\ (i,j=1,\cdots,n-1)$ 与 $D_tu|_{\Sigma_R}=0$, 再利用方程 (8.1)可得

$$[D_{nn}u]_{\beta,\Sigma_{7R/8}}\leqslant CR^{-\beta}([u]_{2,Q_R^+}+1).$$

这样,我们就完成了引理的证明.

定理 9.7 在引理 9.6 的条件下,存在 $\beta\in(0,1)$,$C>0$ 使得

$$[u]_{2+\beta,Q_{3R/4}^+}\leqslant CR^{-\beta}([u]_{2,Q_R^+}+1),\tag{9.13}$$

其中 β,C 依赖于 n,λ,Λ,μ.

类似于定理 8.5 的论证方法我们可得到以下推论:

推论 在定理 9.7 的条件下,可得

$$[u]_{2+\beta,Q_{7R/8}^+}\leqslant CR^{-(2+\beta)}([u]_{0,Q_R^+}+1),\tag{9.14}$$

其中 β,C 依赖于 n,λ,Λ,μ.

推论的证明 我们先应用定理 9.7 来证明推论. 对于任意 $0<\rho<R\leqslant 1/4$ 与任意 $X_0=(x^0,t^0)\in Q_\rho^+$, 如果 $\{X_0+Q_{(R-\rho)/2}\}\subset Q_R^+$, 则由内部估计的结果

$$[u]_{2+\beta,Q_{(R-\rho)/4}(X_0)}\leqslant\frac{C}{(R-\rho)^\beta}\left(1+[u]_{2,Q_{(R-\rho)/2}(X_0)}\right).$$

如果 $\{X_0+Q_{(R-\rho)/2}\}\cap\Sigma_R\neq\varnothing$, 则 $x_n^0<(R-\rho)/2$. 记

$$2\eta=1+\frac{2x_n^0}{(R-\rho)},\quad \frac{1}{2}\leqslant\eta\leqslant 1.$$

又记 Y_0 是 X_0 在边界 $x_n=0$ 的投影. 不难知道长方体

$$Y_0+(Q^+)^\eta_{(R-\rho)/2}=\{X_0+Q_{(R-\rho)/2}\}\cap Q_R^+.$$

应用定理 9.7 的结果，知道存在 $\beta\in(0,1)$，$C\geqslant 1$ 使得

$$[u]_{2+\beta,Y_0+(Q^+)^7_{3(R-\rho)/8}}\leqslant C(R-\rho)^{-\beta}\left(1+[u]_{2,Y_0+(Q^+)^7_{(R-\rho)/2}}\right).\tag{9.15}$$

注意到 $x_n^0<(R-\rho)/2$，我们有如下的包含关系

$$\{X_0+Q_{(R-\rho)/4}\}\cap Q_\rho^+\subset Y_0+(Q^+)^7_{3(R-\rho)/8}.$$

这样由(9.15)与上面的包含关系，可得到

$$[u]_{2+\beta,X_0+Q_{(R-\rho)/4}\cap Q_\rho^+}\leqslant C(R-\rho)^{-\beta}([u]_{2,Q_R^+}+1).$$

由于 X_0 是 Q_ρ^+ 的任意点，所以上面的讨论蕴含

$$[u]_{2+\beta,Q_\rho^+}\leqslant C(R-\rho)^{-\beta}\left([u]_{2,Q_R^+}+1\right).$$

在上式右端项应用内插不等式，对于任意 $0<\rho<R\leqslant R_0=1/4$ 可得

$$[u]_{2+\beta,Q_\rho^+}\leqslant\frac{1}{2}[u]_{2+\beta,Q_R^+}+\frac{C}{(R-\rho)^{2+\beta}}([u]_{0,Q_{R_0}^+}+1).$$

利用引理 8.2，立即得到对于任意 $0<\rho<R\leqslant R_0$，

$$[u]_{2+\beta,Q_\rho^+}\leqslant\frac{C}{(R-\rho)^{2+\beta}}([u]_{0,Q_{R_0}^+}+1).$$

取 $\rho=7R/8$，由上式就可得到推论. 证毕.

定理 9.7 的证明 应用定理 8.4 后的附注，我们知道 u_t 满足以下方程

$$D_t(u_t)-\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}D_{ij}(u_t)=0,\quad u_t|_{\Sigma_R}=0.$$

直接利用第七章线性方程的Krylov-Safonov估计，必存在$\beta\in(0,1)$，$C\geqslant 1$ 使得

$$[u_t]_{\beta,Q_{7R/8}^+}\leqslant CR^{-\beta}([u_t]_{0,Q_R^+}).$$

下面讨论关于空间变量 x 的二阶微商. 记 $K_2=1+[u]_{2,Q_R^+}$. 不妨设 $R=1$，$[u]_{2,Q_1^+}\leqslant 1$，否则做变数替换 $y=\dfrac{x}{R}$，$\tau=\dfrac{t}{R^2}$，$\tilde{u}=\dfrac{u}{K_2}$，方程(8.1)则改为

$$\tilde{u}_\tau-\frac{K_2}{R^2}F\left(\frac{R^2}{K_2}D_y^2\tilde{u}(y,\tau)\right)=0.$$

它与方程(8.1)满足相同的结构条件(F1)与(F6). 现在我们在 Q_1^+ 上讨

论方程(8.1). 记抛物型算子

$$L_0 v = D_t v - \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} D_{ij} v,$$

其中 $\frac{\partial F}{\partial r_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(D^2 u)$. 对于任意方向 γ, $|\gamma| = 1$, 由方程满足的凹性条件(F6), 我们有

$$L_0 u_{\gamma\gamma} \leqslant 0.$$

由引理 3.2 可以得到对于任意 $(x,t) \in Q_{3/4}^+$,

$$u_{\gamma\gamma}(x,t) - u_{\gamma\gamma}(x',0,t) \leqslant C x_n^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} (1 + [D^2 u]_{\alpha,\Sigma_{7/8}}), \quad (9.16)$$

其中 $C > 0$ 仅依赖于 n,λ,Λ,α. 此外, 由方程(8.1), u 满足

$$(u_t(x,t) - u_t(x',0,t)) - a^{ij}(D_{ij}u(x,t) - D_{ij}u(x',0,t)) = 0, \quad (9.17)$$

其中

$$a^{ij} = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} (\tau D^2 u(x,t) + (1-\tau) D^2 u(x',0,t)) \mathrm{d}\tau.$$

由代数引理 8.1, 存在 $\rho_0 > 0$ 与向量组 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_N$ 使得矩阵 $A = (a^{ij})$ 可写成

$$A = \sum_{k=1}^N \beta_k \gamma_k \otimes \gamma_k, \quad \rho_0 \leqslant \beta_k \leqslant \rho_0^{-1} (i = 1, \cdots, N).$$

这样由(9.17)与 $[u_t]_\beta$ 的估计, 我们有

$$\rho_0 \sum_{k=1}^N [D_{\gamma_k\gamma_k} u(x,t) - D_{\gamma_k\gamma_k} u(x',0,t)]_- - \rho_0^{-1} \sum_{k=1}^N [D_{\gamma_k\gamma_k} u(x,t) - D_{\gamma_k\gamma_k} u(x',0,t)]_+ \leqslant C x_n^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} (1 + [D^2 u]_{\alpha,\Sigma_{7/8}}), \quad (x,t) \in Q_{3/4}^+. \quad (9.18)$$

估计(9.16)蕴含着

$$\sum_{k=1}^N [D_{\gamma_k\gamma_k} u(x,t) - D_{\gamma_k\gamma_k} u(x',0,t)]_+ \leqslant C x_n^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} (1 + [D^2 u]_{\alpha,\Sigma_{7/8}}), \quad (x,t) \in Q_{3/4}^+. \quad (9.19)$$

在(9.18)中应用(9.19)我们得到

$$\sum_{k=1}^{N}[D_{\gamma_k\gamma_k}u(x,t)-D_{\gamma_k\gamma_k}u(x',0,t)]_-$$

$$\leqslant Cx_n^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(1+[D^2u]_{\alpha,\Sigma_{7/8}}),\quad (x,t)\in Q_{3/4}^+.$$

由估计(9.12),上式右端中$[D^2u]_{\alpha,\Sigma_{7/8}}\leqslant C$,其中 α 是(0,1)中的某一数.上面两个估计式相加,可以得到所要的边界附近估计:

$$\sum_{k=1}^{N}|D_{\gamma_k\gamma_k}u(x,t)-D_{\gamma_k\gamma_k}u(x',0,t)|$$

$$\leqslant Cx_n^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}(1+[D^2u]_{\alpha,\Sigma_{7/8}}),\quad (x,t)\in Q_{3/4}^+.$$

下面我们要利用这一估计与上节的内估计,采用类似于定理 3.3 的证明方法来建立含侧边 Σ_1 的区域 Q_1^+ 上的 $C^{2+\beta,1+\beta/2}$ 估计.由§8的内估计,对于任意 $(x,t),(y,\tau)\in Q_{3/4}^+$, 存在 $\beta\in(0,1),C\geqslant 1$ 使得

$$|D^2u(x,t)-D^2u(y,\tau)|$$

$$\leqslant\frac{C}{(\min\{x_n,y_n\})^\beta}[|x-y|^2+|t-\tau|]^{\beta/2}.$$

分成两种情况:

(1) 如果 $\min\{x_n,y_n\}\geqslant(|x-y|^2+|t-\tau|)^{1/4}$, 则

$$|D^2u(x,t)-D^2u(y,\tau)|\leqslant C[|x-y|^2+|t-\tau|]^{\beta/4};$$

(2) 如果 $\max\{x_n,y_n\}\leqslant 2(|x-y|^2+|t-\tau|\}^{1/4}$, 则

$$\begin{aligned}|D^2u(x,t)-D^2u(y,\tau)|\leqslant &|D^2u(x,t)-D^2u(x',0,t)|\\&+|D^2u(y',0,\tau)-D^2u(y,\tau)|\\&+|D^2u(x',0,t)-D^2u(y',0,\tau)|\\\leqslant &Cx_n^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}+Cy_n^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}+C|x-y|^\alpha\\\leqslant &C(|x-y|^2+|t-\tau|)^{\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}}.\end{aligned}$$

不可能有其他情况.综合上述两种情况的估计,定理得证.

定理 9.7′ 设 $u\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{M}_R)$ 在 M_R 上满足方程(8.1), $\alpha\in(0,1)$, 且 $u|_{t=0}=0$, 则存在 $\beta\in(0,1),C\geqslant 1$ 使得对于任意的 $R\in(0,1/4)$, 有

$$[u]_{2+\beta,M_{7R/8}}\leqslant\frac{C}{R^\beta}\left(1+[u]_{2,M_R}\right),$$

其中 β,C 只依赖于 n,λ,Λ.

推论 在定理 9.7′的条件下,

$$[u]_{2+\beta,M_{R/2}}\leqslant\frac{C}{R^{\beta}}\left(1+[u]_{0,M_R}\right),$$

其中 β,C 只依赖于 n,λ,Λ.

类似于定理 9.7 的推论的证明可证此推论.

定理 9.7′的证明 与定理 9.7 一样,不妨设 $R=1,[u]_{2,M_R}\leqslant 1$. u_t 在 M_1 上满足

$$\begin{cases}D_t(u_t)-\dfrac{\partial F}{\partial r_{ij}}D_{ij}(u_t)=0,\\ u_t(x,0)=0,\ (x,0)\in Q_{1,0}.\end{cases}$$

利用线性方程的Krylov-Safonov估计,易知存在$\alpha\in(0,1)$,$C\geqslant 1$使得

$$[u_t]_{\alpha,M_{7/8}}\leqslant C. \tag{9.20}$$

现在讨论关于 x 的梯度.对于方向 γ,注意到结构条件(F6),我们有

$$L_0u_{\gamma\gamma}\leqslant 0,\quad u_{\gamma\gamma}|_{t=0}=0, \tag{9.21}$$

其中 $u_{\gamma\gamma}$ 表示沿 γ 方向的二次微商.由引理 3.1,在 $M_{7/8}$ 上有

$$u_{\gamma\gamma}(x,t)\leqslant Ct,\quad 0<t<1. \tag{9.22}$$

方程(8.1)可以写成

$$u_t-a^{ij}D_{ij}u=0,$$

其中

$$a^{ij}=\int_0^1\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(\eta D^2u)\mathrm{d}\eta.$$

由代数引理 8.1 上述方程可以写成

$$\sum_{k=1}^{N}\beta_kD_{\gamma_k\gamma_k}u-u_t=0. \tag{9.23}$$

与前面定理的证明类似,由估计(9.20),(9.22)与等式(9.23)就可得到对于任意 $(x,t)\in M_{7/8}$,

$$|D_tu(x,t)|+|D^2u(x,t)|\leqslant Ct^{\alpha}. \tag{9.24}$$

这就是我们所要的边界附近的估计.下面我们将它与内估计结合起来可得到解在 $M_{7/8}$ 的 $C^{2+\beta,1+\beta/2}$ 估计.由内估计存在 $\beta\in(0,1)$,$C\geqslant 1$ 对于任意 $(x,t),(y,\tau)\in M_{7/8}$,有

$$|D^2u(x,t) - D^2u(y,\tau)| \leqslant \frac{C}{\min\{t,\tau\}^{\beta/2}}[|x-y|^2 + |t-\tau|]^{\beta/2}. \tag{9.25}$$

然后分成两种情况：

(1) $\min\{t,\tau\} \geqslant (|x-y|^2 + |t-\tau|)^{1/2}$;

(2) $\max\{t,\tau\} \leqslant 2(|x-y|^2 + |t-\tau|)^{1/2}$.

完全类似于定理 9.7 的方法，可以得到定理的结论. 详细证明读者可以作为练习.

定理 9.7″　设 $u \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{M}_R^+)$ 在 M_R^+ 上满足方程(8.1)，$\alpha \in (0,1)$，且 $u|_{t=0} = 0$，$u|_{\Sigma_R} = 0$，则存在 $\beta \in (0,1)$，$C \geqslant 1$ 使得对于任意的 $R \in (0,1/4)$，有

$$[u]_{2+\beta,M_{7R/8}^+} \leqslant \frac{C}{R^\beta}\left(1 + [u]_{2,M_R^+}\right),$$

其中 β, C 只依赖于 n,λ,Λ.

推论　在定理 9.7″ 的条件下，

$$[u]_{2+\beta,M_{R/2}^+} \leqslant \frac{C}{R^\beta}\left(1 + [u]_{0,M_R^+}\right),$$

其中 β, C 只依赖于 n,λ,Λ.

定理 9.7″ 的证明　我们仍然不妨设 $R = 1$，$[u]_{2,M_1^+} \leqslant 1$. 与前面定理 9.7′类似利用线性方程的 Krylov-Safonov 估计就可得到存在 $\beta \in (0,1)$，$C \geqslant 1$ 使得

$$[u_t]_{\beta,M_{7/8}^+} \leqslant C. \tag{9.26}$$

现在令 $w = D_k u$ $(k = 1,\cdots,n-1)$，w 在 M_R^+ 上满足以下方程与初边值条件

$$w_t - \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} D_{ij} w = 0,$$

$$w(x,t) = 0, \quad (x,t) \in Q_{R,0} \cup \Sigma_R.$$

然后令 $v = \dfrac{w}{x_n}$，$v(x,t)$ 满足退化方程

$$x_n \frac{\partial v}{\partial t} - x_n \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} D_{ij} v - 2\frac{\partial F}{\partial r_{in}} D_i v = 0,$$

它满足引理 9.4 的条件. 根据引理 9.4 的断言，可以得到对于任意

$(x,t) \in \Sigma_{7/8}$，有

$$|\lim_{x_n \to 0} v(x,t)| \leqslant Ct^{\frac{\alpha}{2+3\alpha}}, \tag{9.27}$$

其中 C 依赖于 n,λ,Λ, α 是属于 $(0,1]$ 的任意一个数(注意此时初值为零). 令 $x_n \to 0$ 就有

$$\sum_{k=1}^{n-1} |D_{kn}u(x',0,t)| \leqslant Ct^{1/5}, \tag{9.28}$$

这里我们已经在(9.27)中取 $\alpha = 1$. 利用方程(8.1)与估计式(9.26), (9.28)可以得到

$$|D_{nn}u(x',0,t)| \leqslant Ct^{\min\{\beta,1/5\}}, \tag{9.29}$$

也就是我们已得到二阶导数在边界上的 Holder 模的估计

$$|D^2u(x',0,t)| \leqslant Ct^{\sigma}, \quad (x,t) \in \Sigma_{7/8}, \tag{9.30}$$

其中 $\sigma = \min\{\beta,1/5\}$. 接着我们建立边界附近的估计. 对于任意方向 γ, 利用凹性条件(F6),我们有

$$L_0 u_{\gamma\gamma} \leqslant 0, \quad (x,t) \in M_1^+. \tag{9.31}$$

令 $h(x,t) = u_{\gamma\gamma}(x,t) - Ct^{\sigma}$, 由(9.31)与(9.30)我们有

$$L_0 h(x,t) \leqslant 0, \quad (x,t) \in M_1^+, \quad h|_{t=0} = 0, \quad h|_{x_n=0} \leqslant 0.$$

根据引理 3.1 情况(1)的结果式(3.4)可得

$$h(x,t) \leqslant Cx_n, \quad (x,t) \in M_{3/4}^+.$$

因此我们得到

$$u_{\gamma\gamma}(x,t) \leqslant C(t^{\sigma} + x_n), \quad (x,t) \in M_{3/4}^+. \tag{9.32}$$

对于任意 $(x,t) \in M_{3/4}^+$, 方程(8.1)可写成

$$u_t(x,t) - a^{ij}D_{ij}u = 0,$$

利用代数引理 8.1,上式可写成

$$\sum_{k=1}^{N} \rho_k D_{\gamma_k\gamma_k} u = u_t. \tag{9.33}$$

与前两个定理一样,由(9.32),(9.33)可进一步得到边界附近的估计:存在 $\eta \in (0,1)$, $C \geqslant 1$ 使得对于任意 $(x,t) \in M_{3/4}^+$, 有

$$|D^2u(x,t)| + |D_t u(x,t)| \leqslant C(|t| + |x_n|^2)^{\eta}. \tag{9.34}$$

我们知道 § 8 已建立了二阶导数的 Hölder 模内估计,即存在 $\beta \in$

$(0,1)$, $C \geqslant 0$ 使得对于任意 $X=(x,t), Y=(y,\tau) \in M^{+}_{3/4}$，有

$$|D^2u(x,t)-D^2u(y,\tau)| \leqslant \frac{C}{\min\{x_n,y_n,\sqrt{t},\sqrt{\tau}\}^{\beta}} d(X,Y)^{\beta},$$

其中 $d(X,Y)$ 是抛物距离. 然后如定理 3.3 证明的技巧，就可得所要的结论. 证毕.

§10　主项方程第一初边值问题解的存在性

我们将用凝固法来得到一般完全非线性方程古典解的存在性，为此我们必须首先建立主项方程初边值问题解的存在性.

对于 $R_0>0$，记 $Q_{R_0}=\{(x,t)\mid -R_0^2<t\leqslant 0,\ |x_i|<R_0\ (i=1,2,\cdots,n)\}$. 有时简记 $Q_0=Q_{R_0}$. 在 Q_0 上考虑初边值问题：

$$\begin{cases} u_t - F(D^2u) = 0, & (x,t)\in Q_0, \\ u(x,t)=g(x,t), & (x,t)\in \partial_p Q_0, \end{cases} \tag{10.1}$$

其中 $F(\cdot)$ 满足结构条件(F1)，(F6)，对于某个 $\alpha \in (0,1)$，$g \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_0)$，由于边值不为 0，前面的许多全局估计不再成立. 最大模全局估计

$$|u|_{0,Q_0} \leqslant K_0 \tag{10.2}$$

是成立的，其中 K_0 仅依赖于结构条件的常数与 $|g|_0$. 由于 Q_0 与 $\boldsymbol{R}^{n+1}\backslash Q_0$ 都是一致(A)型区域，由Krylov-Safonov估计，存在 $\eta \in (0,1)$ 使得

$$|u|_{\eta,Q_0} \leqslant K_\eta, \tag{10.3}$$

其中 η, K_η 也仅依赖于结构条件的常数与 $|g|_1$. 此外有以下内估计：存在 $\beta \in (0,\alpha)$ 使得对于任意 $0<\rho<R_0$，有

$$[u]_{2+\beta,Q_\rho} \leqslant \frac{K_\beta}{(R_0-\rho)^{2+\beta}}[u]_{0,Q_{R_0}},$$

其中 β, K_β 同样只依赖于结构常数.

我们前面对于主项方程可得到 $C^{2+\beta,1+\beta/2}$ 全局估计，但那是对于局部平边界与零边值的. 由于缺乏边界估计，我们不能引用 §7 的结果.

我们采用 Trudinger 技巧，对于任意的 $m=1,2,\cdots,\rho_m<R_0$，当

$m \to \infty$ 时，$\rho_m \to R_0$，取 Q_0 的截断函数 $\zeta_m \in C_0^{2,1}(Q_0)$，$0 \leqslant \zeta_m \leqslant 1$，

$$\zeta_m(x,t) = \begin{cases} 1, & (x,t) \in Q_m, \\ 0, & (x,t) \in \boldsymbol{R}^{n+1} \setminus Q_{(\rho_m+R_0)/2}, \end{cases} \tag{10.4}$$

其中 Q_{ρ_m} 简写为 Q_m，另外自然要求

$$|D\zeta_m| < C(R_0 - \rho_m)^{-1}, \quad |D^2\zeta_m| + |D_t\zeta_m| < C(R_0 - \rho_m)^{-2}.$$

我们不妨设 Q_m 的侧面是属于 $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}$ 的，按原来的定义 Q_m 的侧面是长方体，自然其侧面不可能属于 $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}$，但我们可以光滑它们的侧面，然后仍然记为 Q_m，我们只需使得当 $m \to \infty$ 时，Q_m 是单调增大、一致 (A)型的光滑区域，且 $\bigcup\limits_m Q_m = Q_0$. 记近似算子

$$F^m[u] = (1-\zeta_m)\Delta u + \zeta_m F(D^2 u), \tag{10.5}$$

其中 Δ 是 Laplace 算子. 然后考虑第一初边值问题

$$\begin{cases} (u_m)_t - F^m[u_m] = 0, & (x,t) \in Q_0, \\ u_m(x,t) = g(x,t), & (x,t) \in \partial_p Q_0. \end{cases} \tag{10.6}$$

引理 10.1 设 $F(r)$ 满足结构条件(F1)与(F6)，又设 $u \in C^{2+\alpha_m,1+\alpha_m/2}(\overline{Q}_0)$ 是(10.6)的方程的解，$Q' \subset\subset Q_0$. 对于固定的 $m>0$，存在 $\beta_m \in (0,\alpha]$ 使得对于任意 $X_0 \in Q'$，$X_0 + Q_R \subset Q_0$，则对于 $\rho \in (0,R)$，有

$$\operatorname*{osc}_{Q_\rho(X_0)} D_t u_m \leqslant C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\beta_m} [u_m]_{2,Q_R(X_0)},$$

其中 $\beta_m, C > 1$ 依赖于 n, λ, Λ, m.

证明 我们不妨假定 u_m 足够光滑，否则利用差商代替微商. 将(10.6)的方程关于 t 微分，得到(省略脚标 m)

$$D_t(u_t) - (1-\zeta)\Delta u_t - \zeta \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} D_{ij} u_t + \zeta_t \Delta u - \zeta_t F(D^2 u) = 0.$$

由 Krylov-Safonov 估计，则对于任意 $\rho \in (0,R)$，存在 $\beta \in (0,1)$ (依赖于 m)使得

$$\operatorname*{osc}_{Q_\rho} u_t \leqslant C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\beta} \left(\operatorname*{osc}_{Q_R} u_t + [u]_{2,Q_R}\right).$$

这就蕴含着所要的结论.

引理 10.2 设 $F(r)$ 满足结构条件(F1)与(F6)，初边值 $g(x,t) \in$

$C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_0)$，则对于固定的 $m>0$，存在 $\beta_m\in(0,\alpha]$ 使得问题(10.6) 存在解 $u_m\in C^{2+\beta_m,1+\beta_m/2}(\overline{Q}_0)$.

证明　根据 §7 的结果,对于固定的 $m\geqslant 1$ 只需对于初边值问题(10.6)的属于 $C^{2+\beta_m,1+\beta_m/2}(\overline{Q}_0)$ 的解 $u_m(x,t)$ 给出先验估计 $|u_m|_{2+\beta_m,Q_0}\leqslant C_m$ 即可. 由 ζ_m 的取法,在 Q_0 的抛物边界附近,(10.6)中的方程是一个热传导方程 $(u_m)_t-\Delta u_m=0$. 记 $\eta_m=\dfrac{1}{4}(3R_0+\rho_m)$，由常系数方程的 Schauder 估计,我们有

$$[u_m]_{2+\alpha,Q_0\backslash Q_{\eta_m}}\leqslant C_m. \tag{10.7}$$

因此我们只需建立问题(10.6)的 $C^{2+\beta_m,1+\beta_m/2}$ 内估计. 简记 $Q'=Q_{\eta_m}$，我们将给出估计 $[u_m]_{2+\beta_m,Q'}$. 对于某方向 γ，将(10.6)的方程沿 γ 方向进行微商得到(省略脚标 m)

$$(u_\gamma)_t-(1-\zeta)\Delta u_\gamma-\zeta\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}D_{ij}u_\gamma+\zeta_\gamma(\Delta u-F(D^2u))=0,$$

这里我们用到 $D_xu\in C^{2+\beta_m,1+\beta_m/2}(Q')$. 这是个无妨的假设,因为我们可以用差商 $D_\gamma^h u$ 代替一阶方向微商 u_γ，由上面等式(相应于差商)与 Schauder 理论,可以得到上面的无妨的假设.

再沿方向 γ 微商,利用凹性条件(F6),可得

$$\begin{aligned}(u_{\gamma\gamma})_t&-(1-\zeta)\Delta u_{\gamma\gamma}-\zeta\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}D_{ij}u_{\gamma\gamma}\\&+2\zeta_\gamma\Big[\Delta u_\gamma-\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}D_{ij}u_\gamma\Big]+\zeta_{\gamma\gamma}[\Delta u-F(D^2u)]\\&=\frac{\partial^2F}{\partial r_{ij}r_{kl}}D_{ij}u_\gamma D_{kl}u_\gamma\leqslant 0.\end{aligned}\tag{10.8}$$

类似地这里也不妨设 $D_x^2u\in C^{2+\beta_m,1+\beta_m/2}(Q')$. 利用代数引理 8.1,在(10.8)中取 γ 为那里的向量组 $\gamma_1,\cdots,\gamma_N$. 这样对于任意 $s=1,\cdots,N$，以及任意 $X_0\in Q'$, $X_0+Q_R\subset Q_0$，先设 $[u]_{2,Q_R(X_0)}\leqslant 1$，这样在 $Q_R(X_0)$ 上有

$$L(u_{\gamma_s\gamma_s})\leqslant C\Big(1+\sum_{k=1}^N|D_xu_{\gamma_k\gamma_k}|\Big), \tag{10.9}$$

其中 C 除依赖于结构条件的常数外还依赖于 $m,(R-\rho_m)^{-1}$,

$$Lv = v_t - (1-\zeta)\Delta v - \zeta\frac{\partial F(D^2u)}{\partial r_{ij}}D_{ij}v. \tag{10.10}$$

令

$$\begin{aligned} h_k &= u_{\gamma_k\gamma_k} + 1 \quad (k = 1,2,\cdots,N), \\ w_s &= u_{\gamma_s\gamma_s} + \varepsilon\sum_{k=1}^{N}h_k^2 \quad (s = 1,2,\cdots,N). \end{aligned} \tag{10.11}$$

注意到 $h_k \geqslant 0$ $(k = 1,\cdots,N)$ (已设 $[u]_{2,Q_0} \leqslant 1$)及(10.9)，我们得到

$$\begin{aligned} L\Big(\sum_{k=1}^{N}h_k^2\Big) &= 2\sum_{k=1}^{N}h_kLu_{\gamma_k\gamma_k} - 2\frac{\partial F^m}{\partial r_{ij}}\sum_{k=1}^{N}h_{ki}h_{kj} \\ &\leqslant C(1+|D^3u|) - 2\lambda\sum_{k=1}^{N}|D_xu_{\gamma_k\gamma_k}|^2. \end{aligned} \tag{10.12}$$

由 w_s 的定义及估计(10.9)与(10.12)得到在 $Q_R(X_0)$ 上 w_s 满足

$$Lw_s \leqslant C(1+|D^3u|) - 2\lambda\varepsilon\sum_{k=1}^{N}|D_xu_{\gamma_k\gamma_k}|^2 \leqslant \frac{C}{\varepsilon}, \tag{10.13}$$

其中 $s = 1,2,\cdots,N$. 这样只要在后面适当的选取 ε，我们知道 w_s 满足 §1 基本引理 1.1 的第一个条件. 为验证第二个条件，可以利用(10.6)的方程. 对于任意 $Y_0 = (y_0,\tau_0)$, $Y_1 = (y_1,\tau_1) \in X_0 + Q_\rho$，有

$$[u_t - F^m[u]]_{Y_0} - [u_t - F^m[u]]_{Y_1} = 0. \tag{10.14}$$

应用引理 10.1 我们可以得到

$$|a^{ij}(D_{ij}u(Y_0) - D_{ij}u(Y_1))| \leqslant C\left(\frac{d(Y_0,Y_1)}{R}\right)^{\beta},$$

其中 $\lambda I \leqslant (a^{ij}) \leqslant \Lambda I$. 利用 §8 的代数引理 8.1 有

$$\begin{aligned} C\left(\frac{d(Y_0,Y_1)}{R}\right)^{\beta} &\geqslant |a^{ij}(D_{ij}u(Y_0) - D_{ij}u(Y_1)| \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{N}\beta_k(D_{\gamma_k\gamma_k}u(Y_0) - D_{\gamma_k\gamma_k}u(Y_1)) \\ &\geqslant \rho_0\sum_{k=1}^{N}[D_{\gamma_k\gamma_k}u(Y_0) - D_{\gamma_k\gamma_k}u(Y_1)]_+ \\ &\quad - \frac{1}{\rho_0}\sum_{k=1}^{N}[D_{\gamma_k\gamma_k}u(Y_0) - D_{\gamma_k\gamma_k}u(Y_1)]_-, \end{aligned}$$

其中 ρ_0 是 §8 的引理 8.1 确定的常数. 这说明 u 满足基本引理 1.1 第

二个条件,我们必须证明 $w_k(x,t)$ 也满足相应的条件. 对于 $\delta > 0$ 估计

$$
\begin{aligned}
\delta\sum_{k=1}^{N}[w_k(Y_0) - w_k((Y_1)]_+ - \sum_{k=1}^{N}[w_k(Y_0) - w_k(Y_1)]_- \\
\leqslant \delta\sum_{k=1}^{N}[D_{\gamma_k\gamma_k}u(Y_0) - D_{\gamma_k\gamma_k}u(Y_1)]_+ \\
+ \varepsilon C\sum_{k=1}^{N}[D_{\gamma_k\gamma_k}u(Y_0) - D_{\gamma_k\gamma_k}u(Y_1)]_+ \\
- \sum_{k=1}^{N}[D_{\gamma_k\gamma_k}u(Y_0) - D_{\gamma_k\gamma_k}u(Y_1)]_- \\
+ \varepsilon C\sum_{k=1}^{N}[D_{\gamma_k\gamma_k}u(Y_0) - D_{\gamma_k\gamma_k}u(Y_1)]_-.
\end{aligned}
$$

选取 δ,ε 使得

$$
\delta = \rho_0^2, \quad \varepsilon C \leqslant \frac{\rho_0^2}{4}, \quad 1 - \varepsilon C \geqslant \frac{1}{2}, \tag{10.15}
$$

我们可得

$$
\begin{aligned}
\delta\sum_{k=1}^{N}[w_k(Y_0) - w_k((Y_1)]_+ - \sum_{k=1}^{N}[w_k(Y_0) - w_k(Y_1)]_- \\
\leqslant \frac{1}{2}\rho_0\Big[\rho_0\sum_{k=1}^{N}[D_{\gamma_k\gamma_k}u(Y_0) - D_{\gamma_k\gamma_k}u(Y_1)]_+ \\
- \frac{1}{\rho_0}\sum_{k=1}^{N}[D_{\gamma_k\gamma_k}u(Y_0) - D_{\gamma_k\gamma_k}u(Y_1)]_-\Big] \\
\leqslant C\left(\frac{d(Y_0,Y_1)}{R}\right)^{\beta}.
\end{aligned}
$$

应用基本引理 1.1,则存在 $0 < \tilde{\beta} \leqslant \beta, C_\varepsilon \geqslant 1$, 使得

$$
\sum_{k=1}^{N}\underset{Q_R(X_0)}{\operatorname{osc}} w_k \leqslant \frac{C}{\varepsilon}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\tilde{\beta}},
$$

由 w_k 的定义,则有

$$
\sum_{k=1}^{N}\underset{Q_R(X_0)}{\operatorname{osc}} D_{\gamma_k\gamma_k}u - 4N\varepsilon\sum_{k=1}^{N}\underset{Q_R(X_0)}{\operatorname{osc}} D_{\gamma_k\gamma_k}u \leqslant \frac{C}{\varepsilon}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\tilde{\beta}}.
$$

现在我们又要求取 ε 使得

$$4N\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}, \tag{10.16}$$

综合(10.15)与(10.16)的要求,取 $\varepsilon = \min\left\{\frac{\rho_0^2}{4C}, \frac{1}{2C}, \frac{1}{8N}\right\}$,则

$$\sum_{k=1}^{N} \operatorname*{osc}_{Q_R(X_0)} D_{\gamma_k\gamma_k} u \leqslant C\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\widetilde{\beta}}\left(1 + [u]_{2,Q_R(X_0)}\right).$$

上式是在$[u]_{2,Q_R(X_0)} \leqslant 1$ 的假定下得到的,在一般情况下也有上面形式的估计. 现在我们去掉 $[u]_{2,Q_R(X_0)}$,上式蕴含着对于任意 $Q_R(X_0) \subset Q_0$,存在 $\beta_m \in (0,1)$,$C_m \geqslant 1$,使得方程(10.6)的解 u_m 有如下估计:对于 $0 < \rho \leqslant R \leqslant R_0$,有

$$[u_m]_{2+\beta_m, Q_\rho(X_0)} \leqslant \frac{C_m}{(R-\rho)^{\beta_m}}(1 + [u_m]_{2,Q_R(X_0)}). \tag{10.17}$$

应用内插不等式,可得

$$[u_m]_{2+\beta_m, Q_\rho(X_0)} \leqslant \frac{1}{2}[u_m]_{2+\beta_m, Q_R(X_0)} + \frac{C_m}{(R-\rho)^{2+\beta_m}}\left(1 + [u_m]_{0,Q_R(X_0)}\right).$$

由引理 8.2,我们有

$$[u_m]_{2+\beta_m, Q_\rho(X_0)} \leqslant \frac{C_m}{(R-\rho)^{2+\beta_m}}\left(1 + [u_m]_{0,Q_R(X_0)}\right). \tag{10.18}$$

这就给出了(10.6)的解 u_m 的 $C^{2+\beta_m, 1+\beta_m/2}$ 的内估计. 综合(10.7)与(10.18),我们得到 u_m 的 $C^{2+\beta_m, 1+\beta_m/2}$ 的全局估计,由§7 的定理,这就蕴含所要的结果.

定理 10.3 假设 $F(r)$ 在 $Q_0 = Q_{R_0}$ 上满足结构条件(F1),(F6),对于 $0<\alpha<1$,初边值 $g(x,t) \in C^{\alpha,\alpha/2}(Q_0)$,则存在 $\beta, \eta \in (0,\alpha]$,$C \geqslant 1$,第一初边值问题(10.1)存在解 $u \in C^{\beta,\beta/2}(\overline{Q}_0) \cap C^{2+\eta,1+\eta/2}_{\text{loc}}(Q_0)$,且对于任意 $Q' \subset\subset Q_0$ 有

$$[u]_{0,Q_0} \leqslant C, \quad [u]_{\beta,Q_0} \leqslant C,$$

$$[u]_{2+\eta,Q'} \leqslant \frac{C[u]_{0,Q_0}}{[\operatorname{dist}\{Q', \partial_p Q_0\}]^{2+\eta}}, \tag{10.19}$$

其中 β, η, C 只依赖于 n 与结构条件的常数 α, $|g|_\alpha$ 及 R_0.

此定理是前面的讨论与引理 10.2 的直接推论.

§11　一般的完全非线性方程

我们仍然记 $X=(x,t),X_0=(x_0,t_0),Q_R=B_R\times(-R^2,0]$, $Q_R(X_0)=X_0+Q_R$. 先在 $Q_T=\Omega\times(0,T]$ 上讨论以下形式的方程:

$$u_t-F(x,t,D^2u)=f(x,t), \tag{11.1}$$

其中 $F(x,t,0)\equiv 0$.

对于 $f\in L^1(Q)$, 我们记

$$⨍_Q f\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\frac{1}{|Q|}\int_Q f(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

对于 $F(x,t,r)$, 记

$$\widetilde{\beta}(X;X_0)=\widetilde{\beta}_F(X;X_0)=\sup_{r\in\mathscr{S}^n}\frac{|F(x,t,r)-F(x_0,t_0,r)|}{1+\|r\|}.$$

我们将假定方程(11.1)除(F1)外还满足以下结构条件:

(F7) 存在 $R_0>0,\mu_6>0,\beta\in(0,1)$ 使得对于任意 $0<\rho\leqslant R_0$ 有

$$\left(⨍_{Q_\rho(X_0)\cap Q_T}|\widetilde{\beta}(\cdot;X_0)|^{n+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n+1}}\leqslant\mu_6\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^\beta,$$

$$\left(⨍_{Q_\rho(X_0)\cap Q_T}|f(X)-f(X_0)|^{n+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n+1}}\leqslant\mu_6\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^\beta,$$

其中 $\beta\in(0,1),\mu_5$ 是正常数, λ 是结构条件(F1)中的常数.

定理 11.1　设方程(11.1)在 Q_T 上满足结构条件(F1),(F6), $u\in C^{2+\sigma,1+\sigma/2}(Q_T)$ 是方程(11.1)在 Q_T 上的解, $\sigma\in(0,1)$, 且 $|u|_{0,Q_T}\leqslant K_0$, 则存在 $\alpha\in(0,1)$, 使得如果对于 $\beta\in(0,\alpha)$, 结构条件(F7)在 Q_T 上成立,那么对于 $Q'\subset\subset Q_T$, 有

$$[u]_{2+\beta,Q'}\leqslant C[|u|_{0,Q_T}+1], \tag{11.2}$$

其中 C,α 只依赖于 n,λ,Λ,μ_6, C 还依赖于

$$(\alpha-\beta)^{-1}\quad 与\quad \mathrm{dist}\{Q',\partial_pQ_T\}.$$

证明　第一步　设 $Q_{R_0}(X_0)\subset Q_T$, $|u|_0\leqslant 1$, 我们将证明下面的论断:存在 $\varepsilon\in(0,1),\tilde{\alpha}\in(0,1)$ 使得如果对于 $\beta\in(0,\tilde{\alpha})$, 任意 $0<\rho$

$\leqslant R_0$，方程(11.1)满足

$$\left(\int_{Q_\rho(X_0)\cap Q_T} |\widetilde{\beta}(X;X_0)|^{n+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n+1}} \leqslant \varepsilon\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\beta},$$
$$\left(\int_{Q_\rho(X_0)Q_T} |f(X)-f(X_0)|^{n+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n+1}} \leqslant \varepsilon\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^{\beta}, \tag{11.3}$$

则存在 $0<\theta<1$ 与一多项式序列

$$P_k(x,t)=a_k+\langle b_k,x-x_0\rangle + \frac{1}{2}(x-x_0)^t C_k(x-x_0)+d_k(t-t_0), \tag{11.4}$$

使得

$$d_k - F(X_0,C_k)=0, \qquad \forall k\geqslant 0, \tag{11.5}$$
$$\| u-P_k\|_{L^\infty(Q_{\theta^k}(X_0))} \leqslant \theta^{k(2+\beta)}, \quad \forall k\geqslant 0. \tag{11.6}$$

$P_k(x,t)$ 的系数满足

$$|a_k-a_{k-1}|+\theta^{k-1}|b_k-b_{k-1}|+\theta^{2(k-1)}\|C_k-C_{k-1}\| + \theta^{2(k-1)}|d_k-d_{k-1}| \leqslant C\theta^{(k-1)(2+\beta)}, \quad \forall k\geqslant 0, \tag{11.7}$$

其中 θ,C 仅依赖于 $n,\lambda,\Lambda,\alpha,\beta$，定义 $P_0\equiv P_{-1}\equiv 0$. 我们将用归纳法证明之. 不妨设 $X_0=(0,0),R_0=1$. 对于 $k=0$，(11.5)，(11.6)与(11.7)显然成立，因为 $P_{-1}\equiv P_0\equiv 0,F(0,0,0)=0$ 与 $\|u\|_{L^\infty(Q_1)}\leqslant 1$. 现在假定(11.5)～(11.7)对于 $k\leqslant i$ 成立，要证明它们对于 $k=i+1$ 也成立. 令

$$v(y,\tau)=\frac{(u-P_i)(\theta^i y,\theta^{2i}\tau)}{\theta^{i(2+\beta)}}, \quad (y,\tau)\in Q_1, \tag{11.8}$$

它满足方程

$$v_\tau - F_i(y,\tau,D^2v)=f_i(y,\tau), \quad (y,\tau)\in Q_1, \tag{11.9}$$

其中

$$F_i(y,\tau,r)=\frac{1}{\theta^{i\beta}}[F(\theta^i y,\theta^{2i}\tau,\theta^{i\beta}r+C_i)-F(\theta^i y,\theta^{2i}\tau,C_i)], \tag{11.10}$$

$$f_t(y,\tau)=\frac{1}{\theta^{t\beta}}[f(\theta^t y,\theta^{2t}\tau)+F(\theta^t y,\ \theta^{2t}\tau,C_t)-d_t].\tag{11.11}$$

可以验证 F_t 仍然有椭圆常数 λ,Λ, $F_t(y,\tau,0)\equiv 0$, $\|v\|_{\infty,Q_1}\leqslant 1$. 我们还有

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_{F_t}(y,\tau)=&\sup_r\left|\frac{[F(\theta^t y,\theta^{2t}\tau,\theta^{t\beta}r+C_t)-F(0,0,\theta^{t\beta}r+C_t)]}{\theta^{t\beta}(1+\|r\|)}\right.\\&\left.-\frac{[F(\theta^t y,\theta^{2t}\tau,C_t)-F(0,0,C_t)]}{\theta^{t\beta}(1+\|r\|)}\right|\\\leqslant&\sup_r\left(\frac{\|\theta^{t\beta}r+C_t\|+1+\|C_t\|+1}{1+\|r\|}\right)\frac{\tilde{\beta}(\theta^t y,\theta^{2t}\tau)}{\theta^{t\beta}}\\\leqslant&C\theta^{-t\beta}\tilde{\beta}(\theta^t y,\theta^{2t}\tau).\end{aligned}\tag{11.12}$$

上面最后一步用到以下估计

$$\|C_t\|\leqslant\sum_{k=1}^{t}\|C_k-C_{k-1}\|\leqslant C\sum_{k=1}^{\infty}\theta^{(k-1)\beta}\leqslant C(1-\theta^\beta)^{-1}.\tag{11.13}$$

由断言的条件(11.3)

$$\left(\fint_{Q_1}|\tilde{\beta}_{F_t}|^{n+1}\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{n+1}}\leqslant C\theta^{-t\beta}\left(\fint_{Q_{\theta^t}}|\tilde{\beta}|^{n+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n+1}}\leqslant C\varepsilon,\tag{11.14}$$

显然我们有

$$\begin{aligned}&\left(\fint_{Q_1}|f_t|^{n+1}\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{n+1}}\\&\leqslant\theta^{-t\beta}\left(\fint_{Q_{\theta^t}}|f|^{n+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n+1}}+\theta^{-t\beta}\left(\fint_{Q_{\theta^t}}|\tilde{\beta}|^{n+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n+1}}\\&\leqslant C\varepsilon.\end{aligned}\tag{11.15}$$

现在我们用凝固法,考虑初边值问题

$$\begin{cases}h_\tau-F_t(0,0,D^2h)=0, & \forall\ (y,\tau)\in Q_{7/8},\\h(y,\tau)=v(y,\tau), & \forall\ (y,\tau)\in\partial_p Q_{7/8}.\end{cases}\tag{11.16}$$

由主项方程的 $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}$ 内估计,

$$[h]_{2+\alpha,Q_{3/4}}\leqslant C\left(1+|v|_{0,\partial_p Q_{7/8}}\right)\leqslant C,$$

$$[D_y^2 h]_{0,Q_{7/8-\delta}} \leqslant C\delta^{-2}. \tag{11.17}$$

令 $w = v - h$，则 $w(y,\tau)$ 满足

$$\begin{cases} w_t - a^{ij}D_{ij}w = \tilde{f}(y,\tau), & (y,\tau) \in Q_{7/8}, \\ w(y,\tau) = 0, & (y,\tau) \in \partial_p Q_{7/8}, \end{cases}$$

其中

$$a^{ij} = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(y,\tau,\eta D^2 v + (1-\eta)D^2 h)\mathrm{d}\eta,$$

$$\tilde{f}(y,\tau) = f_t(y,\tau) + F_t(y,\tau,D^2 h) - F_t(0,0,D^2 h), \quad (y,\tau) \in Q_{7/8}.$$

由 A-B-P 型极值原理，并根据定理条件，对于任意的 $\delta \in (0,1/4]$ 可以得到

$$\begin{aligned} \| w \|_{\infty,Q_{7/8-\delta}} &\leqslant \| w \|_{\infty,\partial_p Q_{7/8-\delta}} + C \|\tilde{f}\|_{L^{n+1}(Q_{7/8-\delta})} \\ &\leqslant \| w \|_{\infty,\partial_p Q_{7/8-\delta}} + C \| f_t \|_{n+1,Q_{7/8-\delta}} \\ &\quad + C \| \tilde{\beta}_{F_t} \|_{n+1,Q_{7/8-\delta}}(1 + |D_y^2 h|_{0,Q_{7/8-\delta}}) \\ &\overset{\text{def}}{=\!=} I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \tag{11.18}$$

对于方程(11.9)应用 Krylov-Safonov 内估计，存在 $\alpha \in (0,1), C > 0$ 使得

$$\| v \|_{\alpha,Q_{7/8}} \leqslant C(1 + \| f_t \|_{L^{n+1}(Q_1)}).$$

然后对初边值问题(11.16)应用全局的 Hölder 模估计可得

$$\| h \|_{\tilde{\alpha},Q_{7/8}} \leqslant C(1 + \| v \|_{\alpha,\partial_p Q_{7/8}}),$$

其中 $\tilde{\alpha} = \alpha/(2+\alpha)$. 因此

$$\| w \|_{\tilde{\alpha},Q_{7/8}} \leqslant C(1 + \| f_t \|_{L^{n+1}(Q_1)}).$$

注意到在 $\partial_p Q_{7/8}$ 上 $w = 0$ 与式(11.15)，我们就有

$$I_1 = \| w \|_{\infty,\partial_p Q_{7/8-\delta}} \leqslant C\delta^{\tilde{\alpha}}(1 + \| f_t \|_{L^{n+1}(Q_1)}) \leqslant C\delta^{\tilde{\alpha}}.$$

又注意(11.14)，(11.15)与(11.17)，我们也有

$$I_2 + I_3 \leqslant C\varepsilon\delta^{-2},$$

于是

$$\| w \|_{\infty, Q_{7/8-\delta}} \leqslant C(\delta^{\bar{\alpha}} + \varepsilon \delta^{-2}).$$

取 $\varepsilon = \delta^{2+\bar{\alpha}}$ 可得

$$\| w \|_{\infty, Q_{7/8-\delta}} \leqslant C\delta^{\bar{\alpha}}. \tag{11.19}$$

由估计(11.17)，对于 $\theta \leqslant 3/4$，有

$$\| h - \overline{P} \|_{\infty, Q_\theta} \leqslant C\theta^{2+\alpha},$$

其中 $\overline{P}$ 是多项式，

$$\overline{P}(y,\tau) = h(0,0) + D_y h(0,0) \cdot y + \frac{1}{2} y^t D_y^2 h(0,0) y + D_\tau h(0,0).$$

如果 θ, δ 适当的小，则可使

$$\| v - \overline{P} \|_{\infty, Q_\theta} \leqslant \| w \|_{\infty, Q_\theta} + \| h - \overline{P} \|_{\infty, \theta} \leqslant C\delta^{\bar{\alpha}} + C\theta^{2+\alpha} \leqslant \theta^{2+\beta}.$$

回到原来的变量，注意到(11.8)我们得到对于任意 $(x,t) \in Q_{\theta^{\iota+1}}$ 有

$$|u(x,t) - P_\iota(x,t) - \theta^{\iota(2+\beta)} \overline{P}(\theta^{-\iota} x, \theta^{-2\iota} t)| \leqslant \theta^{(\iota+1)(2+\beta)}. \tag{11.20}$$

如果我们定义

$$P_{\iota+1}(x,t) = P_\iota(x,t) + \theta^{\iota(2+\beta)} \overline{P}(\theta^{-\iota} x, \theta^{-2\iota} t), \tag{11.21}$$

这就蕴含着(11.6)对于 $k = \iota + 1$ 成立. 我们还有

$$C_{\iota+1} = C_\iota + \theta^{\iota\beta} D_y^2 h(0,0), \quad d_{\iota+1} = d_\iota + \theta^{\iota\beta} D_\tau h(0,0),$$

又由(11.10)与(11.16)可得 $d_{\iota+1} - F(0,0,C_{\iota+1}) = 0$. 为了验证(11.7)，从函数 h 的估计(11.17)我们可以得到

$$\begin{aligned} &|a_{\iota+1} - a_\iota| + \theta^\iota |b_{\iota+1} - b_\iota| + \theta^{2\iota} \| C_{\iota+1} - C_\iota \| + \theta^{2\iota} |d_{\iota+1} - d_\iota| \\ &\leqslant \theta^{\iota(2+\beta)} (|h(0,0)| + |D_y h(0,0)| + \| D_y^2 h(0,0) \| \\ &\quad + |D_\tau h(0,0)|) \leqslant C\theta^{\iota(2+\beta)}. \end{aligned} \tag{11.22}$$

第二步　我们将把关于 x 二次、关于 t 一次的多项式称为**(2,1)次多项式**. 下面将证明在第一步的条件下，存在一(2,1)次多项式 $P(x,t)$ 使得

$$\| u - P \|_{\infty, Q_\rho} \leqslant C\rho^{2+\beta}, \quad \rho \in (0,1), \tag{11.23}$$

$$|DP(0,0)| + \| D^2 P(0,0) \| + |D_t P(0,0)| \leqslant C. \tag{11.24}$$

由(11.21),我们知道第一步所构造的多项式 $\{P_k(x,t)\}$ 在 Q_1 上是一致收敛于某一(2,1)次多项式 $P(x,t)$,且满足(11.24).现证明 $P(x,t)$ 满足(11.23).简单的计算如下:对于任意的 $k\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\|u-P\|_{\infty,Q_{\theta^k}}&\leqslant\|u-P_k\|_{\infty,Q_{\theta^k}}+\sum_{i=k+1}^{\infty}\|P_i-P_{i-1}\|_{\infty,Q_{\theta^k}}\\&\leqslant\theta^{k(2+\beta)}+\sum_{i=k+1}^{\infty}\Big[|a_i-a_{i-1}|+\theta^k|b_i-b_{i-1}|\\&\qquad+\frac{1}{2}\theta^{2k}\|C_i-C_{i-1}\|+\theta^{2k}|d_i-d_{i-1}|\Big]\\&\leqslant\theta^{k(2+\beta)}+C\sum_{i=k+1}^{\infty}\big[\theta^{(i-1)(2+\beta)}+\theta^{k+(i-1)(1+\beta)}+\theta^{2k+(i-1)\beta}\big]\\&\leqslant C\theta^{k(2+\beta)}.\end{aligned}$$

根据在这个定理证明之后的附注,可以知道这一结果就蕴含着解的导数 D^2u,D_tu 具有指数为 β 的 Holder 连续性,且有所要的估计(11.2).

第三步 结构条件(F7)可以化归满足条件(11.3)的情况.

在结构条件(F7)中我们做一个坐标平移,使坐标原点移到点 X_0,所以我们不妨设 $X_0=(0,0)$. 现在我们对于方程(11.1)的解 $u(x,t)$ 的自变量与函数做如下的伸缩变换:

$$\begin{aligned}\bar{u}&=\frac{R_1^{-2}u(R_1y,R_1^2\tau)}{K},\\K&=R_1^{-2}\|u\|_{\infty,Q_{R_0}}+\varepsilon^{-1}\mu_5+1,\\G(y,\tau,D^2\bar{u})&=K^{-1}F(R_1y,R_1^2\tau,KD^2\bar{u})\\&=\frac{f(R_1y,R_1^2\tau)}{K}\overset{\text{def}}{=\!=}\bar{f}(y,\tau).\end{aligned}$$

我们有 $\tilde{\beta}_G(y,\tau)=\tilde{\beta}(R_1y,R_1^2\tau)$ 与 $\|\bar{u}\|_{\infty,Q_1}\leqslant 1$, 取 $R_1\leqslant R_0$ 使得 $\mu_6R_0^{-\beta}R_1^{\beta}\leqslant\varepsilon$. 这样

$$\left(\fint_{Q_\rho}|\tilde{\beta}_G(Y;0)|^{n+1}\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{n+1}}\leqslant\varepsilon\left(\frac{\rho}{R_1}\right)^{\beta},$$

$$\left(\fint_{Q_\rho}|\bar{f}(Y)-\bar{f}(0)|^{n+1}\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{n+1}}\leqslant\varepsilon\left(\frac{\rho}{R_1}\right)^{\beta}.$$

定理证毕.

附注　Campanato 空间可以推广到高阶导数的情况，现在我们按抛物距离 的情况来叙述. 设 $\mathscr{P}_k$ 表示所有 $(2k,k)$ 次多项式的集合，Ω 是(A)型区域，以 $D_R(X_0)$ 表示 $Q_R(X_0)\cap Q_T$，$u\in L^2(Q_T)$ 满足

$$\|u\|_{\mathscr{L}_k^{2,\theta}(Q_T)}\stackrel{\text{def}}{=\!=\!=}\sup_{X_0\in Q_T}\sup_{0<R\leqslant 1}\left\{\inf_{P\in\mathscr{P}_k}|Q_R(X_0)|^{-\theta}\int_{D_R(X_0)}|u-P|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right\}^{1/2}$$
$$<\infty.$$

所有这样的 u 组成的空间记为 $\mathscr{L}_k^{2,\theta}(Q_T)$，我们可以证明当 $4(k+1)>(n+2)(\theta-1)>4k$ 时，

$$C^{2k+\alpha,k+\alpha/2}(\overline{Q}_T)\cong\mathscr{L}_k^{2,\theta}(Q_T),$$

其中 $\alpha=\dfrac{(\theta-1)(n+2)}{2}-2k$. 在上面定理证明的第二步中我们对于完全非线性方程(11.1)的解 $u(x,t)$ 已得到估计：对于任意 $0<\rho\leqslant R$，$Q_R(X_0)\subset Q_T$，有

$$\|u-\overline{P}\|_{\infty,Q_\rho(X_0)}\leqslant C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{2+\beta},$$

其中 $\overline{P}(x,t)$ 是(2,1)次多项式. 根据 Campanato 空间的定义

$$u\in\mathscr{L}_1^{2,\gamma}(Q_T)\cong C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{Q}_T),$$

其中 $\gamma=1+\dfrac{2(2+\beta)}{n+2}$.

现在我们考虑包含抛物边界的局部区域 $Q_{2,T}$（定义于(3.1)与§8).

定理 11.2　设方程(11.1)在 $Q_{2,T}$ 上满足结构条件(F1),(F6)，$u\in C^{2+\sigma,1+\sigma/2}(Q_{2,T})$ 是方程(11.1)在 $Q_{2,T}$ 上的解，$\sigma\in(0,1)$，且 $u|_{\Sigma_{2,T}}=0$，$u|_{Q_{2,0}}=0$，$|u|_{0,Q_{2,T}}\leqslant K_0$，则存在 $\alpha\in(0,1)$ 使得对于 $\beta\in(0,\alpha)$，如果结构条件(F7)在 $Q_{2,T}$ 上成立，就有

$$[u]_{2+\beta,Q_{1,T}}\leqslant C\left(|u|_{0,Q_{2,T}}+1\right),\tag{11.25}$$

其中 C,α 只依赖于 n,λ,Λ,μ_6，C 还依赖于 $(\alpha-\beta)^{-1}$ 与 T.

此定理的证明完全类似于定理 11.1. 由于有定理 9.7，定理 9.7′，定理 9.7″的推论，对于主项方程的解我们有估计：对于 $0<\rho<R_0=1/4$ 与 $\alpha\in(0,1)$ 以及任意的 $X_0\in Q_{1,T}$ 有

$$[u]_{2+\alpha,Q_\rho(X_0)\cap Q_{2,T}} \leqslant C\Big([u]_{0,Q_{R_0}(X_0)\cap Q_{2,T}}+1\Big). \qquad (11.26)$$

因此,几乎逐字逐行地重复定理 11.1 的证明,只要对于任意 $X_0 \in Q_{1,T}$,以 $Q_R(X_0) \cap Q_{2,T}$ 代替 $Q_R(X_0)$,利用(11.26)代替定理 8.5 的(8.4)式,我们就可完成定理的证明.

综合定理 11.1 与定理 11.2,可以得到完全非线性方程(11.1)齐次初边值问题古典解的存在性定理.

定理 11.3 设方程(11.1)在 Q_T 上满足结构条件(F1),(F6),$F(x,t,r)$ 足够光滑(例如关于 r 属于 C^2),则存在常数 $\alpha \in (0,1)$ 使得对于 $\beta \in (0,\alpha)$,如果 $\partial\Omega \in C^{2+\beta}$,方程(11.1)满足结构条件(F7),满足接触条件:当 $(x,t) \in \partial\Omega \times \{0\}$ 时,$F(x,0,0)=0$,则方程(11.1)满足初边值条件 $u|_{\partial_p Q_T}=0$ 属于 $C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{Q}_T)$ 的解存在,且有估计

$$[u]_{2+\beta,Q_T} \leqslant C\big([u]_{0,Q_T}+1\big), \qquad (11.27)$$

其中 C,α 只依赖于 $n,\lambda,\Lambda,\mu_5,\mu_6$,$C$ 还依赖于 $(\alpha-\beta)^{-1}$ 与 T.

根据 §7 的存在性定理,将解的存在性问题归结为初边值问题解的 $C^{2+\beta,1+\beta/2}(Q_T)$ 全局估计,定理 11.1 与定理 11.2 再加上通常的局部展平技巧就可完成这一结果.

现在我们已经很容易来处理带有自然结构条件的完全非线性方程

$$u_t - F(x,t,u,Du,D^2u) = 0. \qquad (11.28)$$

我们记

$$G(x,t,r) = F(x,t,u(x,t),Du(x,t),r), \qquad (11.29)$$

则方程(11.28)可以写成

$$u_t - G(x,t,D^2u(x,t)) = 0. \qquad (11.30)$$

假设方程(11.28)满足结构条件(F1)~(F4),$u(x,t) \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q}_T)$ 是初边值问题(2.2),(2.3)的解($g\equiv 0$),利用差商与 Schauder 理论可以定性证明 $u \in C^{4+\alpha,2+\alpha/2}(Q_T)$. 则由 §2~ §5,我们知道存在常数 $\beta \in (0,\alpha)$ 与 $C \geqslant 1$ 使得

$$|u|_{1+\beta,Q_T} \leqslant C,$$

其中 α,C 仅依赖于 $n,\lambda,\Lambda,\mu_1,\mu_2,\mu_4,T,\partial\Omega$. 应用结构条件(F4)与上述结果容易验证

$$
\begin{aligned}
&|G(x,t,r) - G(x_0,t_0,r)| \\
&\quad \leqslant |F_x||x - x_0| + |F_t||t - t_0| \\
&\qquad + |F_z||u(X) - u(X_0)| + |F_p||Du(X) - Du(x_0)| \\
&\quad \leqslant C\mu_4(1 + \| r \|)(|x - x_0| + |t - t_0|^{1/2})^{\alpha}.
\end{aligned}
$$

因此对于在自然结构条件下一般完全非线性方程(11.28)与初边值条件 $u|_{\partial_p Q_T} = 0$ 有以下存在性定理：

定理 11.4 设方程(11.28)在 Q_T 上满足结构条件(F1),(F2),(F3),(F4),(F5),(F6),$F(x,t,r)$ 足够光滑,则存在常数 $\alpha \in (0,1)$ 使得对于 $\beta \in (0,\alpha)$,如果 $\partial\Omega \in C^{\beta}$,结构条件(F7)成立,满足接触条件：当 $(x,t) \in \partial\Omega \times \{0\}$ 时,$F(x,0,0,0,0) = 0$,则方程(11.28)满足初边值条件 $u|_{\partial_p Q_T} = 0$ 属于 $C^{2+\beta,1+\beta/2}(\overline{Q}_T)$ 的解存在,且有估计

$$
[u]_{2+\beta,Q_T} \leqslant C\left([u]_{0,Q_T} + 1\right),
$$

其中 C,α 只依赖于 n,λ,Λ,结构条件的常数,C 还依赖于 $(\alpha - \beta)^{-1}$ 与 T.

符号索引

名词索引

G

H

J

K

L

M

参 考 文 献

[1] L. Boccardo & Th. Gallouet, Nonlinear elliptic and parabolic equations with right-hand side measure, *Comm. PDEs*, 17 (1992), 641～655.

[2] L. A. Caffarelli & X. Cabré, Fully nonlinear elliptic equations, AMS, 1995.

[3] S. Campanato, Equazioni paraboliche del secondo ordine e spazi $\mathscr{L}^{2,\lambda}(\Omega,\delta)$, *Ann. Math. Pura Appl.* 73 (1966), 55～102.

[4] 陈文嫄,《非线性泛函分析》,甘肃人民出版社,1982.

[5] Chen Y. Z., Alexandrov maximum principle and Bony maximum principle for parabolic equations, *Acta Math. Appl. Sinica* (English Series), 2, No. 4., 1985.

[6] 陈亚浙, Krylov 关于完全非线性方程的一些先验估计方法,《数学进展》, 15, No. 1 (1986), 63～101.

[7] 陈亚浙, 吴兰成,《二阶椭圆型方程与椭圆型方程组》,科学出版社,1991.

[8] G. Da Prato, Spazi $\mathscr{L}(\Omega,\delta)$ e loro proprietá, *Ann. Math. Pura Appl.*, 69 (1965), 383～392.

[9] E. De Giorgi, Sulla differenziabilitá e l'analiticitá della estremali degli integrali multipli regolari, *Mem. Acc. Sci. Torino, Cl. Sc. Fis. Mat. Natur.* (3)3 (1957), 25～43.

[10] C. Fefferman & E. M. Stein, H^p spaces of several variables, *Acta Math.*, 129 (1972), 137～193.

[11] A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice-Hall, Inc. 1964.

[12] M. Giaquinta, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems*, Princeton University Press, 1983.

[13] M. Giaquinta, *An Introduction to the Regularity Theory for Nonlinear Elliptic Systems*, Birkhauser Verlag, Basel, 1993.

[14] M. Giaquinta & E. Giusti, Global $C^{1,\alpha}$-regularity for second order quasilinear elliptic equations in divergence form, *J. Rein Angew. Math.*, 351 (1984), 55～65.

[15] D. Gilbarg & N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order* (Second ed.), Springer-Verlag, 1983.

[16] 辜联昆,《二阶抛物型偏微分方程》,厦门大学出版社,1995.

[17] F. John & L. Nirenberg, On functions of bounded mean oscillation, *Comm. Pure Appl. Math.*, 14 (1961), 415~426.

[18] N. V. Krylov & M. V. Safonov, Certain properties of solutions of parabolic equations with measurable coeffiicients, *Izvestia. Akad. Nauk.* SSSR, 44 (1980), 161~175.

[19] N. V. Krylov, Boundedly inhomogeneous elliptic and parabolic equations, *Izvestia Akad. Nauk.* SSSR, 46 (1982), 487~523.

[20] N. V. Krylov, Boundedly inhomogeneous elliptic and parabolic equations in a domain, *Izvestia Akad. Nauk.* SSSR, 47 (1983), 75~108.

[21] N. V. Krylov, On derivative bounds for solutions of nonlinear parabolic equations, *Dokl. Akad. Nauk.*, 274 (1983), 21~25.

[22] N. V. Krylov, *Nonlineaar Elliptic and Parabolic Equations of Second Order*, Reidel, 1987.

[23] O. A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov & N. U. Uraliceva, Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type, *Translations of Math. Monographs*, 23, 1968.

[24] O. A. Ladyzenskaja & N. U. Uraliceva, *Linear and Quasi-linear Equations of Elliptic Type*, 《Nauka》 Moscow, 1965.

[25] G. M. Lieberman, *Seconnd Order Parabolic Partial Differential Equations*, World Scientific, 1996.

[26] J. Moser, A Harnack inequality for parabolic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 17 (1964), 101~134.

[27] J. Nash, Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations, *Amer. J. Math.* 80 (1958), 931~954.

[28] S. J. Reye, Harnack inequalities for parabolic equations to general form with measurable coefficients, Australian National Univ., Centre for Math. Anal., Research Report R44, 1984.

[29] G. Stampacchia,, The Space $\mathscr{L}^{(p,\lambda)}$, $N^{(p,\lambda)}$ and interpolation, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, (4) 19 (1965), 443~462.

[30] N. S. Trudinger, Fully nonlinear uniformly elliptic equations under natural structure conditions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 278, No. 2 (1983), 751~769.

[31] K. Tso, On Aleksandrov-Bakel'man type maximum principle for second order parabolic equations, *Comm.* PDE's, 10, No. 5 (1985), 543～553.

[32] Lihe Wang, On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equations Ⅰ, *Comm. Pure Appl. Math.*, 45 (1992), No. 1, 27～76. On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equations Ⅱ, *Comm. Pure Appl. Math.*, 45 (1992), No. 2, 141～178.

[33] Zhou Shulin, A priori L^{∞}-estimate and gradient of solutions for some nonlinear parabolic equations, *Nonlinear Analysis*, 42 (2000), 887～904.

北京大学出版社数学重点教材书目

1. 北京大学数学教学系列丛书

书　　名	编著者	定价(元)
高等代数简明教程(上、下) (教育部“十五”规划教材)	蓝以中	32.00
黎曼几何引论(上册)	陈维桓	24.00
黎曼几何引论(下册)	陈维桓	15.00
金融数学引论	吴　岚	18.00
寿险精算基础	杨静平	17.00
二阶抛物型偏微分方程	陈亚浙	16.00
数字信号处理(北京市精品教材)	陈乾生	18.00
抽样调查(北京市精品教材)	孙山泽	13.50
测度论与概率论基础(北京市精品教材)	程士宏	15.00

2. 大学生基础课教材

书　　名	编著者	定价(元)
数学分析新讲(第一册)	张筑生	12.50
数学分析新讲(第二册)	张筑生	15.00
数学分析新讲(第三册)	张筑生	17.00
高等数学简明教程(第一册) (教育部2000优秀教学成果二等奖)	李　忠等	13.50
高等数学简明教程(第二册)(获奖同第一册)	李　忠等	15.00
高等数学简明教程(第三册)(获奖同第一册)	李　忠等	14.00
高等数学(物理类)(第一册)	文　丽等	20.00
高等数学(物理类)(第二册)	文　丽等	16.00
高等数学(物理类)(第三册)	文　丽等	14.00
高等数学解题指南	周建莹　李正元	25.00

书　　名	编著者	定价（元）
高等数学（生化医农类）上册（修订版）	周建莹等	13.50
高等数学（生化医农类）下册（修订版）	张锦炎等	13.50
大学文科基础数学（第一册）	姚孟臣	16.50
大学文科基础数学（第二册）	姚孟臣	11.00
数学的思想、方法和应用（教育部“九五”重点教材）	张顺燕	17.50
线性代数引论（第二版）	蓝以中等	16.50
简明线性代数（理工、师范、财经类）	丘维声	16.00
线性代数解题指南（理工、师范、财经类）	丘维声	15.00
解析几何（第二版）	丘维声	15.00
微分几何初步（95 教育部优秀教材一等奖）	陈维桓	12.00
基础拓扑学	M. A. Armstrong	11.00
基础拓扑学讲义	尤承业	13.50
初等数论（95 教育部获奖优秀教材）	潘承洞　潘承彪	25.00
简明数论	潘承洞　潘承彪	14.50
模形式导引	潘承洞　潘承彪	18.00
模曲线导引	黎景辉　赵春来	17.00
实变函数论（教育部“九五”重点教材）	周民强	16.00
复变函数教程	方企勤	13.50
简明复分析	龚　昇	10.00
常微分方程几何理论与分支问题（第三版）	张锦炎等	19.50
调和分析讲义（实变方法）	周民强	13.00
傅里叶分析及其应用	潘文杰	13.00
泛函分析讲义（上册）（91 国优教材）	张恭庆等	11.00
泛函分析讲义（下册）（91 国优教材）	张恭庆等	12.00
现代数学引论	杜　珣	15.00
有限群和紧群的表示论	丘维声	15.50
微分拓扑新讲（教育部 99 科技进步教材二等奖）	张筑生	18.00
数值线性代数	徐树方等	13.00

书　　名	编著者	定价（元）
数学模型讲义（教育部“九五”重点教材）	雷功炎	15.00
概率论引论	汪仁官	11.50
新编概率论与数理统计（工科类）	肖筱南等	19.00
高等统计学	郑忠国	15.00
随机过程论（第二版）	钱敏平等	20.00
应用随机过程	钱敏平等	20.00
随机微分方程引论（第二版）	龚光鲁	25.00
非参数统计讲义	孙山泽	12.50
实用统计方法与SAS系统	高惠璇	18.00
统计计算	高惠璇	15.00
数学与文化	邓东皋等	16.50

3. 高职高专、学历文凭考试和自考教材

书　　名	编著者	定价（元）
微积分（高职高专）（经济类适用）	刘书田	13.50
微积分学习辅导（高职高专）（经济类适用）	刘书田	13.50
高等数学（上、下册）（高职高专）	刘书田	27.50
高等数学学习辅导（上、下册）（高职高专）	刘书田	24.00
线性代数（高职高专）	胡显佑	9.00
线性代数学习辅导（高职高专）	胡显佑	9.00
概率统计（高职高专）	高旅端	12.00
概率统计学习辅导（高职高专）	高旅端	10.00
高等数学（学历文凭考试）	姚孟臣	10.50
高等数学（学习指导书）（学历文凭考试）	姚孟臣等	9.50
高等数学（同步练习册）（学历文凭考试）	姚孟臣等	12.00
高等数学（一）考试指导与模拟试题（自考）（财经类、经济管理类专科段用书）	姚孟臣	18.00
高等数学（二）考试指导与模拟试题（自考）（财经类、经济管理类专升本用书）	姚孟臣	20.00

书　　名	编著者	定价（元）
组合数学（自考）	屈婉玲	11.00
离散数学（上）（自考）	陈进元等	10.00
离散数学（下）（自考）	耿素云等	11.50
概率统计（第二版）（自考）	耿素云等	16.00
概率统计题解（自考）	耿素云等	16.00

4. 研究生基础课教材

书　　名	编著者	定价（元）
微分几何讲义（北京大学数学丛书）（第二版）	陈省身等	21.00
黎曼几何初步（北京大学数学丛书）	伍鸿熙等	13.50
黎曼几何选讲（北京大学数学丛书）	伍鸿熙等	8.50
代数学（上下）（北京大学数学丛书）	莫宗坚等	28.80
微分动力系统导引（北京大学数学丛书）	张锦炎等	10.50
李群讲义（北京大学数学丛书）	项武义等	12.50
矩阵计算的理论与方法（北京大学数学丛书）	徐树方	19.30
位势论（北京大学数学丛书）	张鸣镛	16.50
数论及其应用（北京大学数学丛书）	李文卿	20.00
模形式与迹公式（北京大学数学丛书）	叶扬波	15.00
复半单李代数引论（天元研究生数学丛书）	孟道骥	18.00
群表示论（天元研究生数学丛书）	曹锡华等	12.50
模形式讲义（天元研究生数学丛书）	陆洪文等	20.00
高等概率论（天元研究生数学丛书）	程士宏	20.00
近代分析引论（天元研究生数学丛书）	苏维宜	15.50

邮购说明　读者如购买北京大学出版社出版的数学重点教材，请将书款（另加15%的邮挂费）汇至：北京大学出版社展示厅胡冠群同志收，邮政编码：100871，联系电话：(010)62752019。款到立即用挂号邮书。

北京大学出版社展示厅
2001年7月